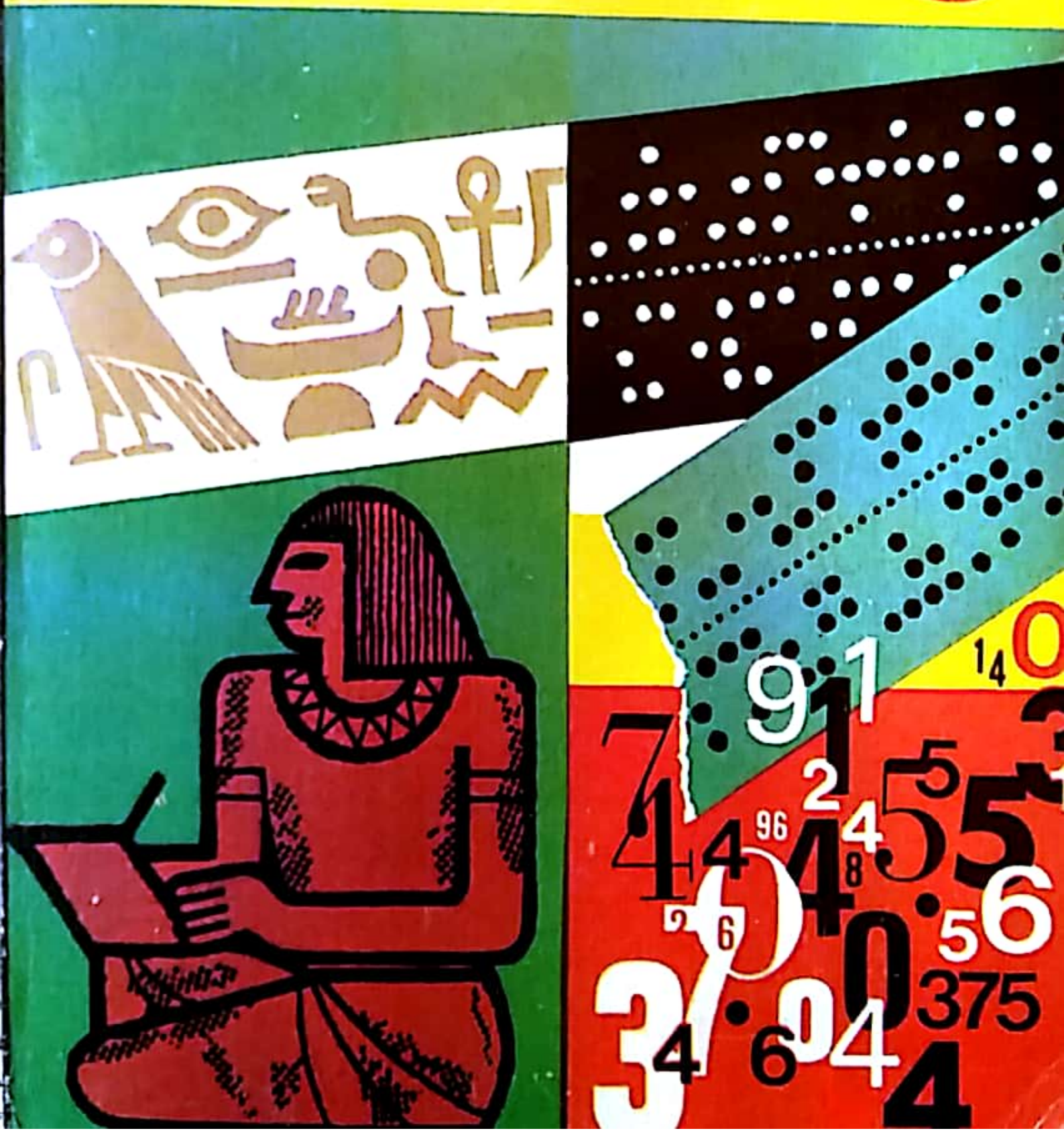


FLORICA T. CÂMPAN
DE LA
PAPIRUSUL RHIND
LA CALCULATORUL
ELECTRONIC

COLECȚIA

ALFA



COLECȚIA





EDITURA ION CREANGA — BUCUREȘTI, 1975

FLORICA T. CÂMPAN



**DE LA
PAPIRUSUL
RHIND
LA CALCULATORUL
ELECTRONIC**

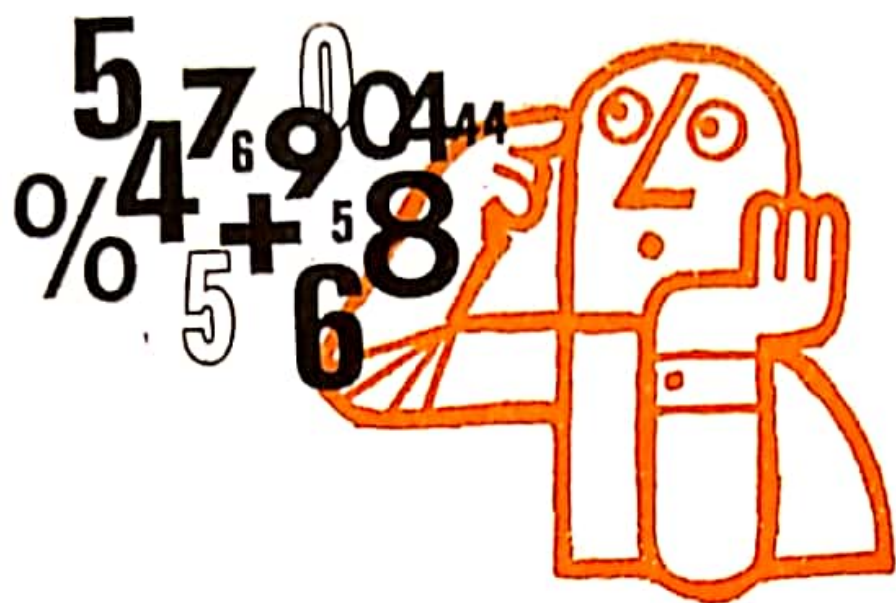
Coperta și ilustrațiile :
N. Nobilescu

PĂRERI ȘI PĂRERI



Pe cît de grele și de obositoare le par unora calculele pe atîta de ușoare și de plăcute le par altora. Este binecunoscută pasiunea ce o avea pentru calcule fizicianul și matematicianul francez A.M. Ampère (1775 – 1836) și pățania lui, căci de n-ar fi nu s-ar povesti!

Intr-o zi, pe cînd se plimba și socotea în minte, calculele deveniseră prea complicate și ar fi vrut să le continue pe o tablă. Deodată a văzut în fața lui o trăsură, oprită la marginea străzii în așteptarea unui client. Pe atunci nu existau mașini, ci numai trăsuri cu cai, iar spatele trăsurii semăna foarte bine cu o tablă neagră. Fără să stea mult pe gînduri, Ampère a scos creta din buzunar și a început să scrie pe această tablă de ocazie. La un moment dat, însă, cineva s-a suit în trăsură și birjarul a dat bici cailor. Atunci Ampère, fără să-și dea seama de cele ce face, a început a alerga în urma trăsurii, urmărindu-și calculele, pînă ce oamenii, înțelegînd situația, au făcut semn birjarului să oprească ! Nu-i singurul exemplu: foarte mulți matematicieni au avut această plăcere de a face socoteli numai așa, de dragul lor. Se spune că John Wallis (1616 — 1703), fiind cu un prieten, a vrut să-i dovedească iscusința lui, calculînd din minte, pe întuneric, primele 20 de zecimale din $\sqrt{3}$ și, fiindcă acesta nu s-a arătat prea convins, i-a cerut să aleagă el un număr de 53 de cifre și i-a calculat rădăcina lui patrată cu 27 de zecimale. Pentru secolul al XVII-lea, cînd nu fuseseră stabilite regulele moderne de a face calculele, era în adevăr un record. Iată încă un îndră-



gostit de calcule: K.F. Gauss (1777 – 1855), poreclit „principele matematicilor“. In 1853, cînd geograful și naturalistul Alexander von Humbold (1769 – 1859) împlinea 84 de ani, Gauss i-a scris următoarea felicitare: „Poi-mîine este ziua în care tu, dragul meu prieten, vei păși într-un ținut în care nici unul dintre principii de azi ai științelor exacte nu au putut intra, vei păși în ziua în care ai să ai etatea pe care a străbătut-o Newton pe pămînt, măsurată prin cele 30 766 zile ale lui“. Iar dacă lui Gauss îi plăcea să calculeze, în zile, viața oamenilor pe care-i admira, musulmanii au făcut un lucru asemănător cu cartea pe care o admirau: ei au numărat literele Coranului, găsind că sînt 329 015,

iar cuvintele: 77 639! În timpurile mai apropiate de noi, matematicianul hindus Srinivasa Ramanujan (1888–1918) privea numerele naturale ca pe niște prieteni personali. Odată, plimbându-se prin Londra împreună cu G.H. Hardy (1877–1947), acesta a oprit un taxi. După ce s-au urcat, Ramanujan, care a reținut numărul ce-l purta, 1729, i-a spus lui Hardy: „Ce număr frumos are această mașină! El este cel mai mic număr ce se poate descompune într-o sumă de două cuburi, în două feluri diferite:

$$1729 = 10^3 + 9^3 \text{ și tot } 1729 = 12^3 + 1^3$$

În același timp, sint și au existat tot atîta de mulți matematicieni cărora nu le-au plăcut calculele. Mulți dintre aceștia au contribuit desigur la construirea calculatoarelor electronice. Într-unul din ultimele articole pe care academicianul prof. Gr. C. Moisil (1906–1973) le-a mai scris în Contemporanul, citim: „Ceea ce-l minunează întotdeauna pe un matematician e confuzia naivă între matematică și calcul... Calculul nu mai face parte din matematică... mă interesează, ca matematician, să demonstrez că $2 + 2 = 4$, dar nu să calculez pe $2 + 2$!”

Și tot din această cauză cu vreo două secole în urmă, matematicianul francez, M.J. de Condorcet (1743–1794) a împărțit un premiu

ce i s-ar fi convenit lui în întregime, și iată cum: În 1774, Academia din Berlin a propus pentru premiere o lucrare în care trebuia să se găsească cele mai simple procedee directe pentru a determina orbita (drumul) cometelor pe sfera cerească. După 4 ani, Condorcet a prezentat soluția acestei probleme și lucrarea a fost premiată, însă premiul a trebuit să fie împărțit cu astronomul Tempelhoff pentru că Condorcet avea oroare de calcule, despre care spunea că „cer multă atenție fără să te subjuge”. Aplicația practică a teoriei stabilită de Condorcet a fost lăsată pe seama aceluia cu care a împărțit premiul ce i se cuvenea. Sînt însă și mulți nematematicieni, unii poeți sau artiști, care au pasiunea calculelor. Unul dintre ei, fiind odată întrebant de către un prieten de ce făcea o înmulțire cu numere așa de mari, a răspuns: „Crezi că ar putea exista o plăcere mai mare decît aceea pe care voi avea-o eu, cînd, după ce am să termin înmulțirea și am să fac proba cu 9, va ieși exact?”

Așa stau lucrurile. Unii oameni socotesc de plăcere sau cu plăcere, alții de nevoie, fiindcă nu există și nici nu a existat vreodată un om pe pămînt care să nu fi făcut măcar o dată în viața lui un calcul, care să nu fi pus alăturea două pietricele sau două boabe,

observînd astfel că $1 + 1 = 2$. Insuși cuvîntul *calcul* are ca origine cuvîntul latin *calculus*, care înseamnă *pietritică*.



TOCMAI PE DOS!

Unu, doi, trei,... așa se învață numele numerelor și totodată numărarea. Dar fiindcă una-i numele numerelor și alta-i numărarea, la început fiecare greșește spunînd 4 în loc de 5 sau 8 înainte de 7. Mai tîrziu, cînd încep socotelile, răspunsul la operațiile $5 + 7$ sau $9 - 4$ cere cîteva clipe de gîndire chiar și acelora care știu să numere pe nerăsuflăte de la 1 la 100.

Oare să fi fost întotdeauna așa? Ei bine, nu! Dacă azi se învață mai întâi numărarea și apoi socotitul, la începutul începutului oamenii au procedat tocmai pe dos, adică au învățat mai întâi să socotească și apoi, într-un târziu, au dat nume numerelor pe care le descoperiseră prin calcul, iar după aceea au început chiar să și numere. Socotelile le făcea șeful tribului de când a început să se aducă și să se puie la grămadă cele necesare traiului în comun: animale sau blănuri, cuțite cioplite sau săgeți, fructe sau rădăcini ș.a.m.d. El știa întotdeauna câte obiecte sînt în fiecare grămadă fiindcă avea la el, sau ascunsese într-un loc sigur, câte o *grămadă-martor* ale acelor mulțimi, punînd deoparte, de fiecare lucru dintr-o anumită specie, câte o pietricică, un grăunte sau o rămurică etc. Asemenea grămezi-martor erau *sume gata calculate*, ele se puteau *aduna* atunci cînd la obiectele existente dintr-o anumită specie se mai adăugau altele noi sau se puteau *scădea*, dacă se lua o parte dintre obiecte. Pentru asemenea operații nu era nevoie să se știe ceva despre numere și numărare. O arată chiar cuvîntul *număr*, provenit de la latinescul *numerus*, care, la rîndul lui, are la origine cuvîntul sanscrit *namati*. Ori, în limba sanscrită, înțelesul lui

namati este *a se cuveni* sau *a distribui*. Aceeași rădăcină are și cuvîntul *namas*, care înseamnă *porție anuală*. Această cercetare a originii cuvîntului ne sugerează modul în care s-a introdus cuvîntul *număr*: șeful tribului distribuia din grămezile de provizii acumulate *porțiile* care se cuveneau pentru traiul tribului. Prin această distribuire se puneau în fața tribului anumite grămezi de obiecte, care cu timpul au căpătat numele de *porție* sau *cea ce este distribuit*, sau *cea ce este cuvenit*, adică *număr*. Operînd cu asemenea *porții-mulțimi* s-a putut observa că mulțimile formate din același fel de obiecte se deosebesc unele de altele numai prin cantitatea lor. De aici trebuie să fi venit ideea de a le *ordona* astfel ca, puse unele după altele, o mulțime să se deosebească de cea dinaintea ei numai prin unul sau cel mult două obiecte. Dar cînd au reușit să gîndească așa, înseamnă că ei și-au construit niște mulțimi care puteau folosi ca *model* pentru conținutul ori-



În grecește, cuvîntul *namati* s-a transformat în *nemo* păstrînd înțelesul de *a distribui*, *a administra*. Din acesta a derivat *nomos*, care înseamnă *lege*.



cărui fel de grămezi de lucruri, cu care s-ar fi întâmplat să aibă de-a face. Ca să le țină minte, și mai ales ca să nu compună de fiecare dată asemenea *grămezi-model*, cuiva trebuie să-i fi venit în minte că ar putea folosi degetele de la mîini: degetul cel mare (sau cel mic) ar putea arăta o grămadă formată dintr-un singur lucru, degetul cel mare împreună cu arătătorul (sau cel mic și inelarul) ar forma grămada compusă din două lucruri și așa mai departe, toate degetele de la o mînă

reprezentînd o grămadă cu 5 obiecte. Așa se explică de ce numărul *cinci* are la origine tocmai cuvîntul *mînă*. În privința sistemului de numerație, povestea este și ea destul de greu de descîlcit. Nu toți oamenii au stabilit același sistem de numerație. Și azi există triburi care au nume numai pentru numerele unu și doi și nu ca noi pentru toate cele zece numere. Se spune că sistemul lor de numerație are *baza* doi și, în limba lor ele numără așa: unu, doi, unu-doi (adică *trei*), doi-doi (adică *patru*), unu-doi-doi (adică *cinci*), doi-doi-doi (adică *6*)... În alte triburi numerele au nume pînă la *cinci*, acestea au un sistem de numerație cu *baza cinci*. Cînd vor să-l exprime pe șase, spun: unu-cinci, sau pentru șapte: doi-cinci ș.a.m.d. La alte popoare, ca cele din America centrală, de pildă la tribul Maya, exista un sistem de numerație cu *baza 20*, care s-a format pornind de la altul mai vechi cu *baza 5*. Babilonienii aveau și ei, pe lîngă sistemul cu *baza zece* (zecimal), un altul cu *baza 60*, numărul 60 împărțindu-se exact cu 12,6 și 5. Acest sistem, sexagesimal, s-a transmis din generație în generație și de la popor la popor pînă la noi. Ca și babilonienii, împărțim și noi cercul în de 6 ori cîte 60, adică în 360 de părți, numite *arce de 1 grad*, iar aceste arce de 1 grad se împart

în 60 de părți numite *minute de arc* și fiecare minută de arc în 60 de *secunde de arc*. La fel și cu unitățile de timp.



Cam așa s-au petrecut lucrurile la începutul începutului cu numerele și cu numărarea, numele numerelor s-au format după ce ele au avut o identitate precisă, tocmai pe dos decât acum, când ni se dau mai întâi numele acestora. Aceste nume: doi, nouă, patru sînt cuvinte ca și numele de oameni: Teodor, Ion, Maria sau ca adjectivele: frumos, bun, clar și nimic nu ne face să înțelegem de ce numai aceste nume de numere *trebuie* spuse într-o anumită ordine: unu, doi, trei..., pe cînd celelalte cuvinte, nu! De aceea această ordine trebuie învățată pe de rost, tocmai pe dos de cum s-a petrecut odinioară, demult, demult.

CAIETUL DE SOCOTELI AL LUI AHMOZÉ

Mulți elevi au învățat, prin mileniul al doilea î.e.n., la școlile de scribi din Egipt, școli ce se mai numeau uneori și *Casa vieții*. Fiecare dintre ei a avut câte un caiet de probleme în care a scris și rezolvat problemele cerute la examenul ce le dădea dreptul să fie numiți funcționari ai statului. Dar dintre atâtea caiete pe care le-au scris, ani de-a rândul, atîția elevi, nu au mai rămas pînă azi decît vreo cîteva și dintre acestea numai două întregi. Unul se cunoaște sub numele de *Papirusul Rhind*, și se află la British Museum din Londra, iar celălalt, *Papirusul din Moscova*, este la Muzeul de Arte frumoase



Papirusul din Moscova fusese folosit mai înainte de a fi caiet de probleme de matematică pentru o altă scriere care a fost ștearsă și apoi problemele au fost scrise pe deasupra. Dar vechea scriere a rămas încă vizibilă. Acest procedeu era folosit în antichitate, căci materialul pentru scris era rar și scump. Un asemenea papirus se numește *palimpsest* (de la *palîn* = din nou și *psa* = a șterge, a rade).

din Moscova. În papyrusul Rhind se găsește și numele celui ce l-a scris, îl chema Ahmozé.

Aceste caiete cu probleme de matematici au fost descifrate și cercetate îndeaproape; s-a stabilit astfel ce fel de probleme se cereau la examene și s-a constatat că examenul nu era deloc ușor. Și dintr-o scrisoare, rămasă de atunci, rezultă același lucru. În ea se arăta cuiva de ce un candidat a căzut la



examen: acesta: „nu a socotit bine nuinărul cărămizilor necesare la construirea unei rampe și nu a găsit greutatea unui obelisc, el nu a dat un răspuns bun nici la problema despre cantitatea de provizii care ar fi trebuit luate de o trupă de soldați ce aveau de săpat un lac și n-a știut câte provizii erau necesare unei alte trupe care avea să plece la război în Siria“. În schimb, se pare că atât Ahmozé, cât și colegul lui, cu vreo două sute de ani mai vîrstnic decît el, care a scris Papirusul din Moscova, au reușit amîndoi la examen, dacă nu în mod excepțional, cel puțin bine. Se poate bănuî aceasta fiindcă la cele mai multe dintre problemele din cele două caiete, examinatorul a pus rezoluția: „ai socotit bine!“

Examinînd mai îndeaproape caietul de probleme al lui Ahmozé se constată că, deși problemele propuse, acum vreo patru mil de ani în urmă, nu erau mai grele decît acelea cuprinse în cărțile de aritmetică de azi, elevii de atunci puteau greși cu mult mai ușor la calcule decît acei de azi. Din ce cauză apare această deosebire? Din cauza modului de scriere a numerelor. Anume, deși egiptenii aveau un sistem de numerație zecimal, de care se foloseau de cel puțin cu un mileniu mai înainte, ei nu cunoșteau sistemul nostru

pozițional de scriere a numerelor. Ei aveau cîte un semn special pentru fiecare fel de unități pînă la unități de milioane, fiecare dintre acestea putînd fi repetat pînă la de nouă ori. Ca să vedem diferența dintre adunarea a două numere, așa cum o scria Ahmozé și cum se scrie azi, să considerăm următorul exemplu:

67390	(67390):	$\begin{array}{cccc} \gamma\gamma\gamma & \delta\delta\delta & c\ c & \wedge\wedge\wedge \\ \gamma\gamma\gamma & \delta\delta\delta\delta & c & \wedge\wedge\wedge \end{array}$
24986	(24986):	$\begin{array}{ccccccc} \gamma\gamma & \delta\delta\delta\delta & c\ c\ c & \wedge\wedge\wedge & \text{ } \\ \gamma\gamma & \delta\delta\delta\delta & c\ c\ c & \wedge\wedge\wedge & \text{ } \end{array}$
92376	(92376):	$\begin{array}{ccccccc} \gamma\gamma\gamma & \delta\delta & c\ c & \wedge\wedge\wedge & \text{ } \\ \gamma\gamma\gamma & \delta\delta & c & \wedge\wedge\wedge & \text{ } \\ \gamma\gamma\gamma & & & \wedge & \text{ } \end{array}$

Dacă ar fi trebuit ca egiptenii să facă toate adunările, scriindu-le așa cum le-a scris Ahmozé în caietul lui de examen, și cum am făcut-o aici, încetineala cu care în mod normal se executau aceste operații ar fi dat peste cap întregul aparat administrativ al țării. Nu s-a întîmplat aceasta fiindcă, în mod obișnuit, scribii făceau toate socotelile pe abac sau numărătoare și transcriau rezultatele pe papirus.

Cunoștea Ahmozé tabla înmulțirii?

Nu, el nu știa decît să adune și să *dubleze* un număr, adică să înmulțească numai cu doi. Din această cauză el transforma orice înmulțire într-o adunare de termeni ce se succedau unul după altul. De exemplu, dacă avea să facă înmulțirea 9×17 , începea scriind înmulțitorul 17, iar la stînga lui, pe aceeași linie, pe 1. Dedesubtul lui 1 scria pe 2, iar pe aceeași linie, în continuare, dublul lui 17, adică 34. El continua această operație pînă ce, în stînga, putea compune, prin adunare, pe deînmulțit, adică în acest caz pe 9 și însemna cu o linioară aceste numere. Aceste linioare îi arătau care sînt numerele din dreapta, care, prin adunare, vor da produsul căutat. Operația din papirus arăta astfel:

$9 \times 17 =$	1	17	
153	2	34	
	4	68	$1 + 8 = 9$
	8	136	
total	1	153	$17 + 136 = 153$

Înmulțiri curioase

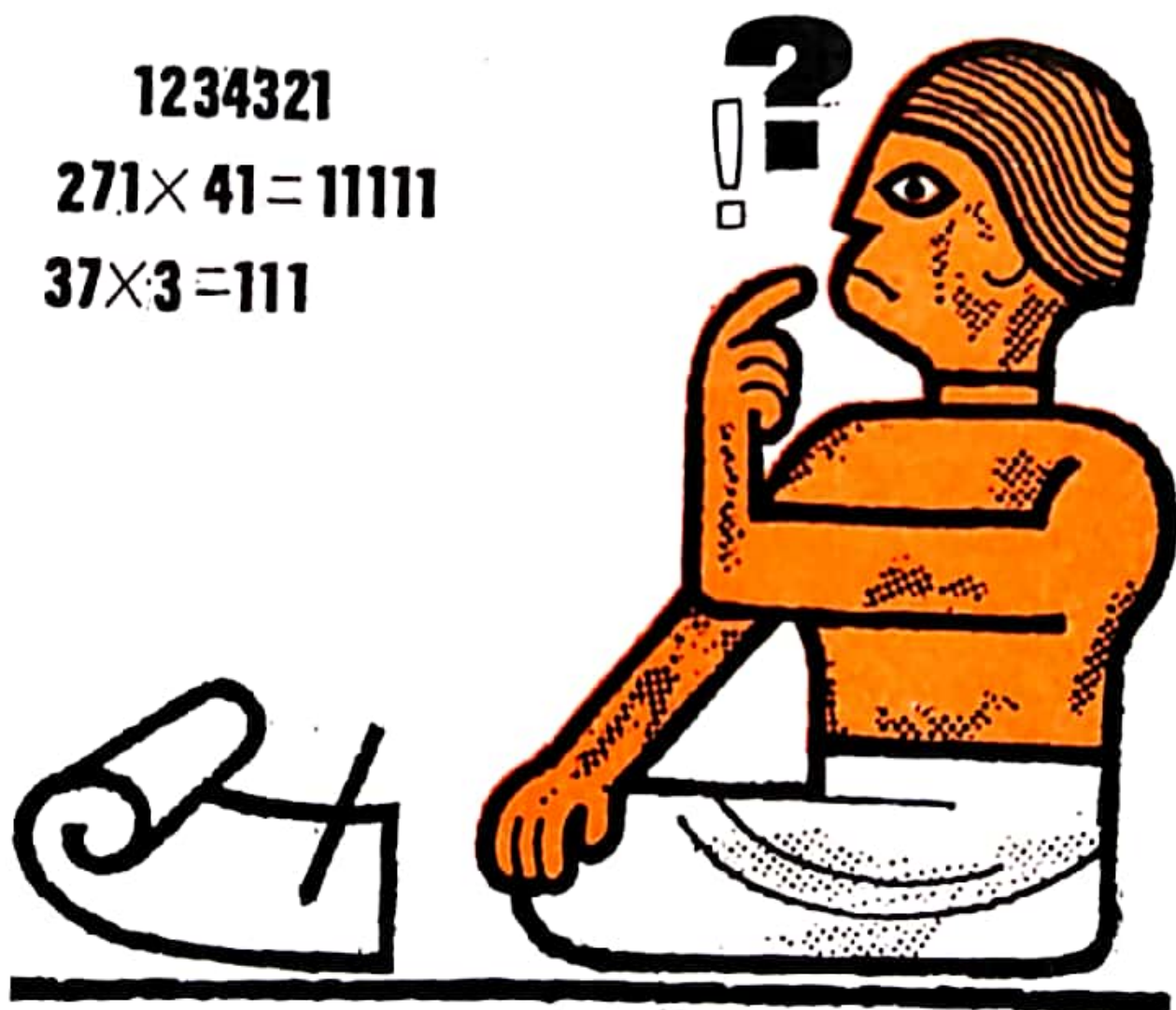
Dacă ținem seama de metoda egipteană de scriere a numerelor, prin alăturarea semnelor

unităților de diferitele ordine, înțelegem că regulile moderne de înmulțire nu puteau fi folosite, chiar dacă s-ar fi cunoscut, fiindcă ele presupun că numerele sînt notate în sistemul pozițional. Oare ce ar fi spus Ahmozé, dacă i-ar fi arătat cineva aceste înmulțiri curioase? Le-ar fi putut aprecia el frumusețea care se vedește și e legată numai de sistemul pozițional? Cum le-ar fi transpus el în hieroglife?

1234321

$271 \times 41 = 11111$

$37 \times 3 = 111$



$$\begin{aligned}
37 \times 3 &= 111 \\
37 \times 303 &= 11211 \\
37 \times 30303 &= 1121211 \\
37 \times 3030303 &= 112121211 \\
&\text{etc....}
\end{aligned}$$

sau:

$$\begin{aligned}
271 \times 41 &= 11111 \\
271 \times 4141 &= 1122211 \\
271 \times 414141 &= 112232211 \\
271 \times 41414141 &= 11223232211 \\
&\text{etc....}
\end{aligned}$$

sau încă:

$$\begin{aligned}
152207 \times 73 &= 11111111 \\
152207 \times 7373 &= 112222211 \\
152207 \times 737373 &= 112233332211 \\
152207 \times 73737373 &= 11223344332211 \\
152207 \times 7373737373 &= 1122334444332211 \\
&\text{etc....}
\end{aligned}$$

Ahmozé împărțea adunînd?

De ce nu ar fi făcut-o, dacă împărțirea este operația inversă înmulțirii? N-avem decît

să răsfoim caietul lui, ca să ne încredințăm!
Să căutăm mai întâi o împărțire exactă, de pildă, să împărțim $900 : 75 = 12$.

În caietul lui, această împărțire s-ar fi scris exact ca și înmulțirea lui 900 cu 75, adică el l-ar fi scris pe 75 la stînga lui 1 și apoi ar fi început să dubleze numărul, pînă cînd, de data aceasta în dreapta, ar fi găsit suma 900 (sau un număr apropiat de 900, cînd împărțirea nu s-ar fi făcut exact). Aceste numere le-ar fi însemnat cu o linioară și apoi, uitîndu-se în stînga, ar fi stabilit prin adunare cît este cîtul. Așadar, Ahmozé ar fi scris așa:

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \cdot & 75 \\
 2 & \cdot & 150 \\
 4 & \cdot & 300 \\
 8 & \cdot & 600 \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 300 + 600 & = & 900 \\
 4 + 8 & = & 12 \quad (900 : 75 = 12)
 \end{array}$$

rezultat 12



Ce răspuns trebuie dat la problema: O funie are 36 de m și în fiecare zi se taie cîte 3 m. În cîte zile va fi tălată întreaga funie?
Răspuns corect: în 11 zile. De ce?

Dar dacă împărțirea nu se făcea exact?

Cît rezultă din împărțirea lui 853 prin 84?

Pentru noi nu-i prea greu să aflăm că $853 : 84 = 10\frac{13}{84}$. Același rezultat l-a obținut și Ahmozé? Să vedem caietul !

1	84	$168 + 672 = 840$
2	168/	
4	336	$853 - 840 = 13$
8	672/	

rezultat: $10, \frac{1}{105}, \frac{1}{210}, \frac{1}{840}$.

Nu-i chip s-o scoți la capăt cu buclucașul de Ahmozé, ar fi spus Ion Creangă, și ar fi avut dreptate ! Ce înseamnă oare aceste fracții cu numărătorul 1 înșirate, unele după altele, la dreapta lui 10?

Răsfoind caietul prietenului nostru constatăm că bietul Ahmozé nu cunoștea decît fracțiile cu numărătorul 1, așadar el nu știa ce este o fracție, ci numai ce este o *unitate fracționară*. O asemenea unitate fracționară se numește azi *fracție alicotă*. Pentru ca să noteze aceste unități fracționare, el avea un semn special , hieroglifa *ra*, care avea înțeles de *parte sau bucată dintr-un număr*.

acel număr fiind scris dedesubtul semnului ra:

De exemplu fracția $\frac{1}{105}$ se scria: C° . Pentru

celelalte fracții, care aveau alt numărător în afară de 1, nu existau semne speciale, cu

excepția fracțiilor $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$, care apăreau

mai des în problemele de măsurare și de împărțire a terenului. Rezultă că toate fracțiile

ce aveau numărătorul diferit de unitate trebuiau descompuse în unități fracționare. Această

operație se făcea tot prin metoda dublărilor succesive, ca, de pildă, în cazul de față:

$$\diagup 1 \quad \frac{1}{840}$$

$$2 \quad \frac{1}{420}$$

$$\diagup 4 \quad \frac{1}{210} \quad 1 + 4 + 8 = 13$$

$$\diagup 8 \quad \frac{1}{105} \quad \frac{13}{840} = \frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{840}$$

Iată deci rostul fracțiilor folosite de Ah-mozé. Noi am scrie azi între ele semnul plus, dar egiptenii nu aveau acest semn pentru adunare, ci scriau pur și simplu fracțiile unele după altele, înțelegînd prin această înșirare operația de adunare. După cum se vede, pro-

cedeul de dublare s-a putut aplica fiindcă numitorul fracției era par. Dar dacă numitorul ar fi fost impar? În acest caz, pentru Ahmozé lucrurile s-ar fi simplificat, fiindcă el avea o tabelă, transcrisă în caietul lui, în care se găseau gata descompuse toate fracțiile de forma $\frac{2}{n}$, unde n era un număr impar (adică de forma $n = 2p + 1$) pînă la valoarea $n = 49$, și el putea să copieze de acolo rezultatul descompunerii.

CURIOASA BIBLIOTECĂ DIN NINIVE

Cînd, pe la jumătatea secolului al XIX-lea, au fost descoperite ruinele vestitului palat din Ninive și s-a dat peste un strat gros de vreo jumătate de metru de bucăți de plăci de lut ars, amestecate cu lemn putred și țărînă, nimeni nu a bănuît că acestea ar putea fi foi din cărțile primei biblioteci din lume. A trebuit entuziasm, rîvnă și mai ales o adîncă înțelegere din partea arheologilor ca să reconstituie, din acele cioburi de lut, curățate



cu migală, o parte dintr-o ciudată bibliotecă, în care fiecare carte avusese drept tărtaj o lădiță de lemn, iar ca file, tăblițe de lut ars imprimate pe o parte și pe cealaltă cu numeroase semne în formă de cuie, de unde și numele de scriere cuneiformă. După cum se știe acum, toate popoarele care au locuit pe

cîmpia Mesopotamiei: akkadieni, sumerieni etc., numite cu un singur cuvînt babilonieni, scriau, încă din mileniul al treilea î.e.n., pe tăblițe de lut proaspăt cu un bețișor de trestie și uscau acele tăblițe la soare sau le ardeau în cuptor, ca să nu se deformeze și să devină rezistente. Biblioteca fusese înființată în secolul al VII-lea î.e.n. de regele asirian Assurbanipal, care, după propria lui mărturisire, cunoștea arta scrisului și știa să facă cele mai grele înmulțiri și împărțiri ! El a hotărît să i se copieze cu exactitate toate scrierile ce se găseau prin arhivele templelor și ale palatelor din imperiul lui și le-a așezat, împreună cu celelalte scrieri din timpul lui, în încăperi speciale, repartizate pe materii de către un personal pus anume în acest serviciu. Dintre aceste cărți, ce purtau pecete cu inscripția: „Palatul lui Assurbanipal, regele Universului și regele Asiriei“, foarte multe s-au dovedit a fi de matematici. Numai o parte dintre ele au fost descifrate pînă acum, fiindcă această muncă a început abia de vreo 40 de ani. Rezultatele sînt așa de surprinzătoare încît au devenit obiect de cercetare pentru mulți savanți ce se ocupă de istoria matematicilor. S-a găsit, de pildă, că există două feluri de tăblițe cu caracter matematic, unele cuprinzînd probleme, iar altele tabele numerice.

Amîndouă interesează deopotrivă, căci dacă din primele se pot stabili care erau ramurile din domeniul matematicilor ce fuseseră dezvoltate și nivelul la care se ajunsese, din celelalte se pot deduce metodele și tehnica de calcul. Cu totul neașteptată a fost descoperirea că babilonienii, spre deosebire de vecinii lor egipteni, aveau un sistem de scriere a numerelor asemănător cu sistemul nostru pozițional. Asemănător, fiindcă în notarea unui număr, același semn avea valori diferite care depindeau de poziția lui în expresia numărului. Există însă și o deosebire fundamentală între aceste două sisteme poziționale de scriere a numerelor, anume în timp ce sistemul folosit acum este *zecimal*, acela de odinioară era *sexagesimal*. De pildă, iată numărul 576 137, scris în sistemul sexagesimal 2 40 2 17, unde pentru o mai ușoară înțelegere s-au folosit cifrele noastre în locul celor cuneiforme. Ca să fie și mai clar, să scriem mai întâi numărul dat descompus în sumă de produse ale puterilor lui 10 (sistemul zecimal pozițional) și apoi descompus în sume de produse ale puterilor lui 60 (sistemul sexagesimal pozițional). Avem:

$$576\ 137 = 5 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + \\ + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 7 \text{ și}$$

$$\begin{aligned}
 240 \cdot 217 &= 2 \cdot 60^3 + 40 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + \\
 &+ 17 = 2 \cdot 216\,000 + 40 \cdot 3\,600 + \\
 &+ 2 \cdot 60 + 17
 \end{aligned}$$

Dacă se efectuează adunările din ultima sumă se obține numărul 576 137. Babilonienii cunoșteau și sistemul zecimal și îl foloseau, mai ales în problemele de natură practică, legate de viața de toate zilele. În acest caz însă, ei nu aplicau sistemul pozițional, ci acela pe care-l foloseau egiptenii și toate popoarele pînă la introducerea sistemului pozițional, adică prin alăturarea și repetarea semnelor unităților de diferite ordine. Sistemul pozițional sexagesimal se aplica la scrierea fracțiilor și era folosit mai ales de astronomi sau de alți oameni de știință. Cum au ajuns babilonienii la acest sistem de numerație a rămas încă un mister fiindcă diferitele ipoteze ce s-au formulat nu au fost acceptate în mod unanim.

Un alt fapt curios ce s-a constatat din cercetarea tăblițelor cuneiforme este că, în afară de datele problemei și rezultatele lor, nu apar nici un fel de indicații asupra metodelor ce au dus la rezultat. Dacă-i vorba de înmulțiri și împărțiri, modul cum au fost efectuate se poate ghici din prezența tabelelor de înmulțire și a tabelelor de numere



reciproce. Într-adevăr, existența acestor tabele arată că babilonienii nu efectuau înmulțirile nici împărțirile prin metoda dublării, așa cum procedau egiptenii, ci în mod direct, așa cum procedăm noi azi. Numai că, din punct de vedere practic, lucrurile erau mai complicate decât acum, din cauza sistemului lor sexagesimal! Aceasta fiindcă, dacă în sis-

temul zecimal tabla înmulțirii începe cu 1×1 și se termină cu 10×10 , în sistemul sexagesimal ea începe cu 1×1 , dar se termină cu 60×60 ! Prin urmare, spre deosebire de elevul de azi, care memorează rezultatele a 50 de înmulțiri, scribul de acum trei, patru sau cinci milenii ar fi trebuit să învețe pe de rost nu mai puțin decît 1 800 de înmulțiri! Aceasta era imposibil, de aceea s-a recurs la tabele de înmulțire calculate dinainte, pe care orice scrib le avea la îndemînă și putea transcrie din ele dintr-o dată rezultatul, dacă înmulțirile se făceau între numere mai mici decît 60 sau așa cum procedăm și azi pentru înmulțirile cu înmulțitorul de două sau mai multe cifre. În privința împărțirii, ea era transformată în înmulțire, făcîndu-se produsul dintre deîmpărțit și inversul împărțitorului. Cum au ajuns babilonienii la această idee nu se știe, dar, dacă se scrie operația sub formă de fracție, folosindu-se notația actuală, metoda apare imediat. Fie de exemplu împărțirea:

$$843 : 153 = \frac{843}{153} = 843 \cdot \frac{1}{153}$$

Așadar, calculatorul căuta în tabela numerelor reciproce care este inversul împărțitorului și apoi făcea înmulțirea, potrivit tabelelor de

înmulțire, între acest număr și deîmpărțit. Pentru o oarecare familiarizare cu o tabelă de numere reciproce, așa cum se prezintă ea, copiem de acolo, înlocuind doar scrierea cuneiformă, următoarele numere:

2	30
3	20
1 20	45

S-ar părea că numai de numere inverse nu poate fi vorba! În realitate expresia nu-i mai greu de dezlegat decît ar fi un rebus, dacă ținem seama pe de o parte că în scrierea cuneiformă se elimina tot ce ar fi fost de prisos și apoi că fracțiile erau exprimate în sistemul sexagesimal. Așadar să căutăm semnificația numerelor din tabela de mai sus: Numerele din coloana din stînga reprezintă numerele reciproce lui 2, 3 și $80 = 1.60 + + 20$, dar, fiindcă orice număr reciproc unui număr dat se scrie ca o fracție cu numărătorul unu, acesta putea fi omis ca să se considere numerele întregi în locul inverselor lor. Coloana din partea dreaptă reprezintă valorile respective ale numerelor din stînga; acestea se scriu ca fracții cu numitorul 60 sau un multiplu de 60, așadar, în acest caz, numitorul era acela care nu avea rost să fie scris decît cel mult trebuia indicat, prin deplasare

la stînga dacă în loc de 60 se va scrie o putere a lui 60. Cu aceste indicații tabloul scris mai înainte ar avea forma următoare:

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \dots & \frac{30}{60} \\ \frac{1}{3} & \dots & \frac{120}{60} \\ \frac{1}{80} & \dots & \frac{45}{60^2} \end{array}$$

După cum se observă toate numerele alese aici s-au exprimat exact prin fracții sexagesimale. Dar acesta este numai un caz excepțional, de obicei inversele numerelor întregi se exprimă prin fracții nelimitate și prin urmare în mod aproximativ. Calculatorii tabelelor au cunoscut și aceste cazuri și le-au consemnat prin indicația „numărul nu are o valoare reciprocă”, după care îl exprimau cu o anumită aproximație. De pildă, în una dintre aceste tabele a fost găsită valoarea aproximativă a lui $\frac{1}{7}$, exprimată prin numărul: 8 34 17 8 34 17 ceea ce înseamnă fracția sexagesimală periodică:

$$\frac{1}{7} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{8}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{17}{60^6}$$

Babilonienii au arătat un talent excepțional pentru calcule extrem de subtile pentru acea

vreme. Au fost descifrate pînă acum tăblițe cu patratele și cuburile numerelor, cu rădăcina patrată a numerelor care nu sînt patrate perfecte, calculate uneori cu o aproximație foarte mare, de pildă valoarea $\sqrt{2} = 1,414214$. De asemenea s-au găsit tabele care arată cum se calculează rădăcina cubică a unui număr care este un cub perfect și multe altele, a căror înșirare nu-și are locul aici, fiindcă ele depășesc cadrul în care se cuprind problemele de natură practică legate de viața cea de toate zilele. De pildă, într-o tabelă calculată prin mileniul al doilea î.e.n. se găsesc 15 numere *pitagoreice*, adică de forma $a^2 = b^2 + c^2$, unde a , b și c sînt numere întregi. O tabelă de acest fel nu mai are o aplicație practică imediată, ci una teoretică. Ea dovedește mai întîi că babilonienii au cunoscut teorema lui Pitagora cu mult mai înainte de a fi fost formulată ea de greci și apoi că babilonienii au întrezărit și un alt aspect al științei despre numere, independent de acela de instrument necesar și sigur pentru stabilirea soluțiilor problemelor de natură practică din orice domeniu ar fi ele. Se anticipează astfel latura teoretică și abstractă a științei despre numere, latură care se va dezvolta mai tîrziu.

GATA ÎNARMATĂ S-A NĂSCUT ATENA DIN CAPUL LUI JUPITER

Numai în Elada, unde grecii au văzut-o pe zeița Atena ieșind din capul lui Jupiter gata înarmată cu scut, lance și coif strălucitor, cum spune legenda, putea să se nască, tot așa dintr-o dată, și știința matematică — a formelor și a numerelor — purtând scutul logicii, lancea raționamentului și coif strălucind peste veacuri. Până la greci, toate cunoștințele de geometrie sau despre numere au fost găsite pe cale practică și au fost folosite în mod practic la rezolvarea problemelor impuse de viața dusă în comun: construcții de locuințe sau de temple, măsurarea ogoarelor sau cântărirea grânelor și a alimentelor, numărarea ființelor sau a grămezilor de obiecte casnice de diferite feluri, socotirea veniturilor sau a dobânzilor rezultate din schimbul de mărfuri, stabilirea cheltuielilor necesare pentru procurarea de armament și echiparea oștirilor în vederea apărării sau a unui atac ș.a.m.d. Din toate aceste probleme, legate de buna organizare a unui stat, nu puteau lipsi numerele, nici când trebuiau comparate mulțimile și nici când

trebuiau măsurate lungimile, ariile sau volumele. În primul caz, *numerele naturale*, întregi, erau acelea care numărau, în celălalt, la numerele naturale, care numărau mulțimile de unități întregi, s-au mai adăugat și alte numere ce s-au format prin împărțirea unităților de măsură în două, trei, patru și chiar șasezeci de părți. Din acestea au apărut numere de forma $\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{5}$, care s-au numit *fracționare* și apoi, tot ca urmare a măsurătorilor, au apărut și numere de alt fel ca $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ etc. Egiptenii, babilonienii și alte popoare vechi ca hindușii, chinezii etc.,



despre care nu avem timp nici loc să vorbim aici, au cunoscut și au folosit în calculele lor atît numerele întregi cît și pe cele neîntregi, străduindu-se să găsească metode cît mai ușoare, mai repezi și mai sigure ca să opereze cu ele. În acest scop au inventat abacul, calculatul pe degete sau tabele cu calcule făcute dinainte. Astfel, din negura vremurilor și pînă azi, numerele ca și celelalte cunoștințe matematice au fost folosite de oameni ca singurele instrumente capabile să rezolve cu precizie problemele ridicate de tehnică, economie sau celelalte științe. Insuși Assurbanipal, primul rege cult care a prevăzut că omului îi va trebui o bibliotecă, considera numerele de-a valma cu celelalte obiecte pe care știa să le mînuiască: „am învățat să trag cu arcul, să gonesc carul de luptă, să fac cele mai grele înmulțiri și împărțiri...” Desigur că nici grecii nu se puteau lipsi de acest neprețuit ajutor al numerelor, pe care știința calculului o pune la dispoziția lor. Dar, în același timp, ei singuri au bănuț că, sub înfățișarea de sclav, gata să îndeplinească munca ce i se cerea, se ascunde o nouă zeitate, pe nume *Arithmos* și i-au cerut lui Hefaistos să mai despice o dată capul lui Jupiter, ca să iasă și ea de acolo,

în toată strălucirea ei, ca odinioară zeița Atena. Cuvîntul *arithmos* a rămas mai mult cu înțelesul de *număr natural*, dar pentru grecii de odinioară el avea un sens mai adînc, care implica ordinea și armonia, din el s-a format și cuvîntul *ritm*, ce exprimă aceste calități. *Arithmos* era un nume care-l deosebea de celălalt nume al numărului, acela de *logos*, în care se cuprindea înțelesul de *valoare numerică*, de valoare ce rezulta din operații cantitative, din măsurări sau evaluări. *Arithmos* era numele dat numărului natural care a fost eliberat de toate corvezile calculelor și ferit de mutilările prin care ar fi putut să se schimbe într-un număr neîntreg. Prin *arithmos* se înțelegeau numai numerele naturale 2,3,4... și nici măcar unu (1) nu era număr natural, fiindcă el era privit ca *unitatea* din care se forma mulțimea numerelor naturale. De la acest nume grecii au format cuvîntul *Arithmetiki*, ajuns azi Aritmetică, cu înțeles de știință a numerelor, adică de studiu bazat pe raționament al proprietăților numerelor abstracte. În unul dintre dialogurile lui Platon, intitulat „Harmide sau despre înțelepciune”, Socrate spunea că *Aritmetica este știința a ceea ce este par și impar, a deosebirilor dintre numere și a relațiilor dintre ele*. Această nouă știință despre numere era considerată de greci cu



Din scrierile lui Platon se cunoaște că Pitagora a împărțit studiul matematicilor în patru părți, toate făcînd obiect de cercetare al filozofilor. Prima dintre ele era *Aritmetica* sau studiul numerelor. Celelalte trei erau: *Geometria* sau studiul mărimilor în repaos, *Muzica* sau studiul numerelor aplicate și *Astronomia* sau studiul mărimilor în mișcare. În evul mediu acest grup se numea *quadrivium*.

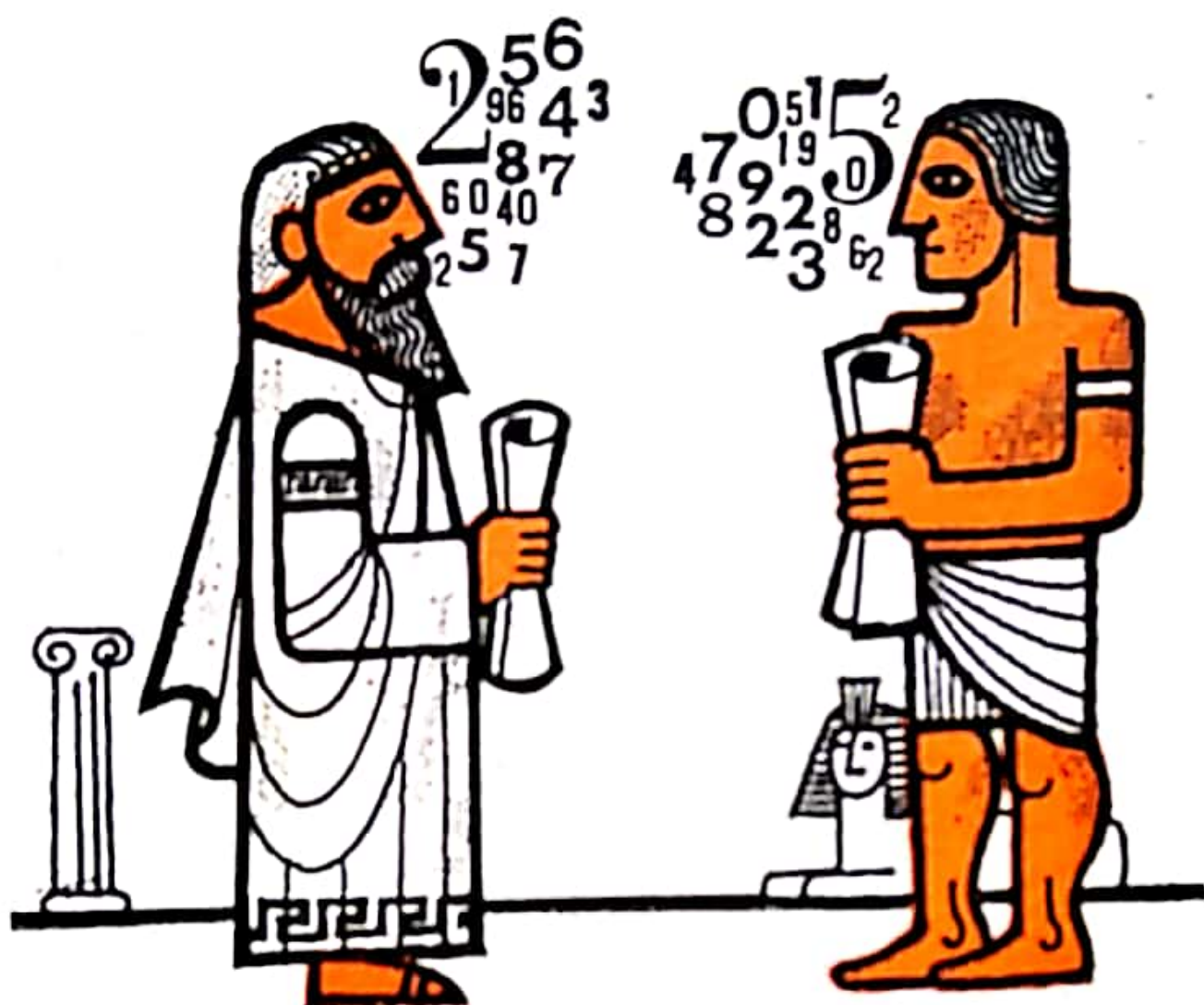
totul diferită de vechea știință a calculului, pe care tot ei au numit-o *Logistiki*, avînd ca obiect pe *logos*. Romanii au latinizat cuvîntul, numind și ei *logistică* știința metodelor practice de calcul. La grecii antici logistica se învăța în școlile elementare și în ea erau cuprinse sistemul de numerație, scrierea numerelor întregi și a *mărimilor fracționare*, căci spre deosebire de toate celelalte popoare grecii nu considerau fracțiile ca numere, ci ca *mărimi*, adică rapoarte de numere (*logos*), care măsurau segmente sau alte mărimi fizice. Și poate e interesant de amintit că grecii aveau un sistem de numerație zecimal, dar nu au cunoscut scrierea pozițională. Spre deosebire însă de egipteni, ei foloseau literele alfabetului ca numere; fiecare dintre litere avînd o anumită valoare, numărul se scria prin alăturarea valorilor care prin adunare îl re-

prezentau. Aceste operații cuprinse în Logistică erau însă lăsate pe seama sclavilor și a negustorilor. Filozofii, începînd cu Thales (sec. VII î.e.n.) se ocupau numai de Aritmetică. Thales a călătorit mult și, în Egipt, a cunoscut metodele de calcul ale scribilor de acolo. Nu i-a plăcut, desigur, faptul că egiptenii învățau totul pe de rost, fără să se întrebe de ce se face așa? Întors în țara lui, Thales a pus raționamentul la baza învățămîntului matematic, folosind gîndirea logică ca să stabilească orice adevăr pe care-l enunța. După el, Pitagora și discipolii lui au dat cea mai largă dezvoltare a aritmeticii, folosind numai metoda raționamentului. Și el a călătorit mult și mai cu seamă a fost



Prin veacul al XVI-lea *Logistica* se numea încă și *Aritmetică practică*, *Arta calculării*, *Algorithm* sau *Arta minoră* (ca să se deosebească de *Arta majoră*, cum era denumită *Algebra*). Numele de *Aritmetică* ducea pe atunci la confuzie, de aceea, pînă în secolul al XVIII-lea au fost folosite numirile de *Aritmetică teoretică* sau de *Teorie a numerelor*. Dar și mai tîrziu, K. F. Gauss, în cartea celebră de teoria numerelor publicată în 1801, păstrează înțelesul pe care l-au dat grecii cuvîntului aritmetică, numind-o *Cercetări aritmetice*. Azi însă cuvîntul aritmetică a fost definitiv înlocuit prin numirea de *Teoria numerelor*, propusă de matematicianul francez A.M. Legendre în titlul cărții lui, apărută în 1797, *Încercări asupra teoriei numerelor*.

atras de cunoștințele matematice ale babilonienilor. E foarte probabil ca acestea să fi avut un rol important în descoperirile pe care le-a făcut el mai târziu. Prin Thales și mai ales prin Pitagora, matematicienii greci au învățat să privească numerele din alt punct de vedere decât toate celelalte popoare ale antichității. Un exemplu la îndemîna noastră ni-l aduce chiar scribul Ahmozé. Cînd avea de făcut o înmulțire sau o împărțire el descompunea unul dintre numere într-o sumă de puteri ale lui 2 și apoi își continua celelalte operații. Dacă numărul era 9, atunci el găsea întîi că $9 = 1 + 2^3 (= 8)$, dacă numărul ar fi fost 13, atunci el ar fi scris $13 = 1 + 2^2 (= 4) + 2^3 (= 8)$ sau dacă era vorba de 12 găsea că $12 = 2^2 (= 4) + 2^3 (= 8)$. Făcea aceste calcule în mod mecanic și nu se întreba niciodată dacă această descompunere a unui număr oarecare într-o sumă de puteri ale lui 2 — la care se mai adăuga și 1 dacă numărul era fără soț — este *posibilă* întotdeauna și dacă ea este unică? El considera că descompunerea era posibilă, știind că operația nu dăduse niciodată greș. Era o motivare *empirică* sau *intuitivă*, care ar fi putut să-l inducă în eroare, dar pe el nu l-a interesat niciodată atari speculații filozofice, fiindcă el urmărea numai rezultatul practic al ope-



rațiilor. Pe filozoful grec l-a interesat însă acest lucru, și a vrut să știe dacă descompunerea aceasta este într-adevăr posibilă și cum se poate stabili ea în mod logic? Mai întâi el a observat că numerele întregi, ca și alte lucruri sau ființe, au însușiri prin care se deosebesc unele de altele. De pildă, unele numere sînt *pare*, iar altele *impare*.

Apoi că numerele impare se pot obține din cele pare dacă acestora li se adaugă sau li se scade o unitate. Iar despre numerele pare a descoperit că unele dintre ele rămân tot pare cînd sînt înjumătățite, ca de pildă $8 = 4 + 4$ și de aceea ele au fost numite numere par — pare, iar altele, ca de pildă $6 = 3 + 3$, se descompun în două numere impare. Ele au fost numite numere par — impare. Aceste proprietăți i-au fost îndeajuns ca să demonstreze că *orice număr N se descompune în mod unic într-o sumă de puteri ale lui doi dacă numărul este par și într-o sumă de puteri ale lui doi plus unu, dacă el este impar*. Și iată cum a demonstrat: *Cazul 1*. Numărul N este par și anume *par ori par*, adică de forma $N = 2 \cdot 2^p$, unde p poate fi par sau impar. Dacă p este tot par, atunci $N = 2^{2p}$, și astfel N apare ca produsul unei puteri a lui 2 pînă cînd ultimul factor va fi 2 sau pînă cînd un factor r va fi impar. Atunci, dacă r este impar el trebuie scris $r = 2t + 1$ și deci N se descompune într-o sumă de doi termeni: $N = 2^s (2t + 1) = 2^{s+1} \cdot t + 2^s$, unde s este ultimul exponent provenit din descompunerea numărului par prin înjumătățire. Raționamentul continuă în mod analog cu numărul t , pînă ce se ajunge la alt număr impar și apoi la 2 sau la $3 = 2 + 1$. Așa că, în cele

din urmă $N = 2^a + 2^b + \dots + 2^m$, unde $a, b, \dots, m$ sînt numere întregi.

Cazul 2. Numărul N este impar, adică de forma $N = 2p + 1$. Ținînd seamă de cazul 1, teorema este complet demonstrată. Prin acest raționament și prin toate încercările de a înlocui inducția empirică sau intuiția printr-un proces de gîndire logică, matematicienii greci au introdus ceva cu totul nou și neașteptat în domeniul cunoștințelor matematice. Dintr-un simplu instrument de calcul, ei au transformat grămada de cunoștințe matematice, stabilite prin experiențe și adunate în dezordine din moși-strămoși, într-o știință riguroasă și încîntătoare, care a atras multe minți înclinate spre meditație.

În paginile următoare se vor putea cunoaște atît unele dintre acele atrăgătoare proprietăți ale numerelor stabilite de pitagoreici și urmașii lor, cît și unele dintre cele mai interesante și nebănuite progrese realizate în epoca modernă de către calculul practic. Căci, aceste două ramuri care se ocupă fiecare de un alt aspect al numărului, în ciuda faptului că ele au rămas și vor rămîne mereu despărțite, *Aritmetica*, denumită azi *Teoria numerelor*, ocupîndu-se de proprietățile numerelor naturale, iar *Logistica*, care și-a schimbat numele

în *Aritmetică*, stabilind metode noi de calcul cu orice fel de numere reale, au contribuit deopotrivă la zidirea și dezvoltarea civilizației noastre.



Iosif Moissiodax, unul dintre renumiții profesori de matematici de la Academia domnească din Iași, povestește, în *Autobiografia* pe care a tipărit-o la Viena în 1780, că a fost nevoit să părăsească postul ce-l deținea, fiindcă începând un curs de *Aritmetică*, boierii au considerat că prin aceasta el a coborât nivelul cursurilor clasei de filozofie și, în loc de matematici superioare, intenționează să facă un curs bun „pentru băcani”!

IN TOVĂRĂȘIA NUMERELOR ADMIRATE DE PITAGORA

Se spune că Pitagora considera că *Aritmetica* este cea mai frumoasă și cea mai avantajată dintre științe, fiindcă numai pentru ea lucrurile apar sub formă de numere. Nici nu-i de mirare dacă ne gândim că numărul — *numărul natural*, singurul privit ca

număr de către toți matematicienii greci din antichitate — a fost prima și cea mai simplă noțiune matematică prin care omul a găsit calea către înțelegerea naturii înconjurătoare. „Tot ce se poate cunoaște are număr, fără de număr nu-i posibil să cuprinzi ceva cu gândul sau să recunoști“, nota, la vreo sută de ani după moartea lui Pitagora, unul dintre discipoli, într-o scriere din care s-au păstrat numai câteva fragmente. Și rezultatele din domeniul Aritmeticii au ajuns pînă la noi din referințe de mai târziu, mult după moartea lui Pitagora, fiindcă acele descoperiri erau considerate secrete și ca atare tănuite tuturor celor ce nu făceau parte din tagma pitagoreicilor. Transmise din generație în generație, peste vreo trei veacuri ele au fost adunate de Euclid în cărțile VII, VIII și IX, din celebra sa lucrare *Elemente*. În chiar prima pagină din cartea a VII-a sînt prezentate mai multe feluri de numere, care se deosebesc unele de altele prin proprietățile lor, așa după cum vara, pe o pajiște, florile ne apar în forme și culori diferite. Mai întîi, sînt definite numerele *perechi* și *neperechi*, aceasta fiind prima deosebire care a atras atenția pitagoreicilor și a multor alți matematicieni de mai târziu. O cunoșteau dealtfel și egiptenii, precum și babilonienii, însă ei nu au

sesizat-o ca pe una dintre caracteristicile ce ar dezvălui personalitatea numerelor. După numerele *pereche ori pereche, pereche ori nepereche și nepereche ori nepereche*, Euclid definește *numerele prime*, ca acelea pe care le măsoară numai unitatea, adică altfel spus, *numerele ce nu se împart decît cu ele însele sau cu unitatea*, așa cum sînt 3, 7, 11 etc. Opușe acestora sînt *numerele compuse*. Ele apar sub forma unui produs de mai multe numere prime, de aceea definiția spune că ele *măsoară un număr oarecare* sau că se pot descompune în factori primi, ca de pildă: $10 = 2 \times 5$; $12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2$. Această proprietate fundamentală a numerelor prime, de a constitui elementele din care se formează toate celelalte numere ce nu sînt prime, a făcut ca ele să joace un rol important nu numai în



Pitagoreicii știau că numărul numerelor prime este nesfîrșit. Teorema 20 din cartea a IX-a a lui Euclid demonstrează aceasta într-un mod simplu, prin metoda *reducerii la absurd*, construind un număr prim mai mare decît cel mai mare număr prim, presupus a fi ultimul. În ultimele secole, mari matematicieni ca L. Euler (1707–1783), J. L. Lagrange (1736–1813), A. M. Legendre (1752–1833), P. G. Dirichlet (1805–1859), P. Cebîșiov (1821–1894), I. Bertrand (1822–1900) ș.a. au stabilit noi demonstrații ale acestei însemnate teoreme.

Teorema lui Goldbach (1690–1764). Originea acestei teoreme nerezolvate încă se află în scrisoarea pe care acest matematician a scris-o în 1742 prietenului său L. Euler, întrebându-l dacă el nu ar putea dovedi că „orice număr par (exceptând pe 2 care-i prim) poate fi scris ca suma a două numere prime”. Goldbach observase acest lucru la un șir întreg de numere ca de ex.: $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7=5+5$, $12=5+7$, $14=3+11$ și $14=7+7$, $16=3+13=5+11$, $18=5+13=7+11$ $30=7+23=11+19=13+17$ etc.

Euler nu a putut găsi această demonstrație, dar nici nu a găsit vreun exemplu care să contrazică această afirmație. De-atunci întrebarea pusă de Goldbach s-a transformat într-o teoremă, care nu a putut fi demonstrată, în mod cu totul general, nici pînă azi, deși ea a fost cercetată de cele mai alese talente matematice. Aproape complet, teorema a fost rezolvată în 1937 de matematicianul sovietic I.M. Vinogradov. El a reușit să arate că toate numerele *pare*, destul de mari, pot fi reprezentate printr-o sumă de cel mult patru numere prime. Rămîne deci ca în viitor să se poată stabili dacă sînt îndeajuns nu *patru* ci *două* numere prime și apoi să se înlăture restricția impusă de condiția „destul de mare”, condiție care înseamnă că trebuie să existe mai întîi un întreg N , astfel că dîndu-se acest N orice alt întreg n care este mai mare decît întregul N ($n > N$) poate fi reprezentat prin suma de cel mult patru numere prime!

cercetările pitagoreicilor, ci și de atunci înainte pînă în zilele noastre. De numerele prime este legat și numele lui Eratostene, prietenul lui Arhimede și contemporan cu Euclide. Se spune că el a întocmit prima tabelă care conținea toate numerele prime de la 1 la 1 000, scriind mai întîi pe un papyrus, pe care l-a fixat de un cadru de lemn, ca să rămînă întins, toate numerele de la 1 la 1 000 și apoi a scos prin găurire din tabelă toate numerele neprime, lăsînd numai nu-

merele prime. Această tabelă a fost numită *ciurul lui Eratostene*. În realitate și Pitagora determinase șirul numerelor prime, dar, după cum am văzut, descoperirile făcute în școala lui nu s-au aflat decît mult mai tîrziu.

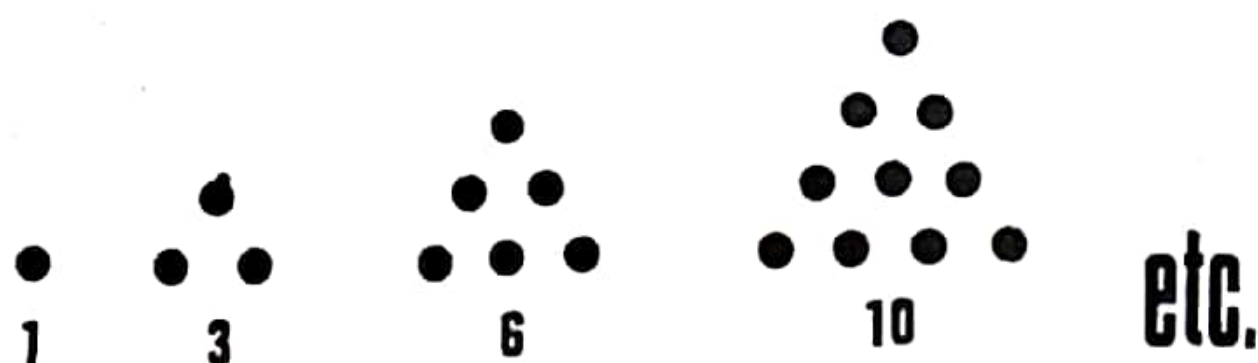


Platon scria că pitagoreicii găseau numerele prime de la 1 la un număr oarecare N , scriind întîi toate numerele de la 1 la N și apoi tăind pe rînd, întîi toate numerele, în afară de 2, care erau divizibile cu doi, apoi toate numerele de după 3 divizibile cu 3 ș.a.m.d. Exact aceeași metodă a folosit-o peste vreo trei veacuri și Eratostene și tot ea a fost folosită și mai tîrziu, pînă azi, fiindcă

nu există o altă metodă generală de a determina numerele prime, decât arătând că numărul cercetat nu are divizori. Azi tabloul numerelor prime depășește numărul 10 000 000 și a fost stabilit cu ajutorul mașinii electronice de calcul, așa că se poate constata cu ușurință dacă un număr, care nu trece de acest prag, este prim sau nu. Pentru alte numere, metoda de a vedea aceasta este lăsată la inspirația cercetătorului. Un exemplu cu totul ieșit din comun se cunoaște din corespondența purtată în secolul al XVII-lea între Pierre Fermat și călugărul iezuit Marin Mersenne. Mersenne l-a rugat pe Fermat să-i spună dacă numărul 100 895 598 169 este prim sau nu. A doua zi Fermat îi răspunde că numărul este compus și are ca factori numerele prime 898 423 și 112 303! Cum a stabilit acest uluitor răspuns, nu se știe!

Tot în cartea a VII-a, după numerele compuse, urmează definiția *numărului patrat* și apoi a *numărului cub*. Euclid amintește astfel de numai două soiuri de numere dintr-un șir mai lung, toate avîndu-și numele legat de o figură geometrică și studiate de Pitagora sub numele general de *numere figurate*. Se pare că pitagoreicii au ajuns la descoperirea acestor numere figurate încercînd să determine numărul pietricelelor pe care le așezau ca să formeze anumite figuri geometrice regulate, aidoma stelelor grupate în constelații. Ori, mare le-a fost surpriza cînd au constatat că din asemenea joacă au putut stabili niște legi precise, la care se supun numerele ce reprezintă o anumită figură. De pildă, *numerele triunghiulare*, adică acelea în care pie-

tricelele sînt așezate așa ca să formeze un triunghi echilateral:



După cum se vede din figură în primul triunghi cele 3 pietricele formează vîrfurile triunghiului. Din el se obține alt triunghi adăugînd la una dintre laturile cu două pietricele, considerată drept bază, alte 3 pietricele ($n = 6$). Aceste numere triunghiulare se pot continua la nesfîrșit, adăugînd mereu la baza triunghiului un rînd nou, conținînd o pietricică în plus. Rezultă că numerele *triunghiulare* se formează prin adunarea succesivă a numerelor din șirul natural: 1, $1+2 = 3$, $1+2+3 = 6$, $1+2+3+4 = 10$, ... $1+2+3+4+5 = 15$, ... Numerele 1, 3, 6, 10, 15... se numesc *numere triunghiulare*. Se observă că aceste numere se pot scrie ca produsul a două numere și anume:

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \quad 3 = \frac{2 \cdot 3}{2} \quad 6 = \frac{3 \cdot 4}{2} \quad 10 = \frac{4 \cdot 5}{2} \quad 15 = \frac{5 \cdot 6}{2} \dots$$

Șirul acestor numere triunghiulare este nesfârșit. Cum am putea însă scrie un număr oarecare din șir, oricât de mare ar fi el, fără să le scriem pe toate celelalte pînă la el? Dacă reușim să facem aceasta, înseamnă că am stabilit legea după care se succed numerele triunghiulare. Pitagora a găsit-o, așa că se poate găsi! Să scriem mai întîi acel număr N , așa după cum se formează, adică prin adunarea tuturor numerelor naturale de la 1 la n :

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

Comparînd cu modul în care am format produsele primelor numere triunghiulare, înseamnă că vom scrie $N = \frac{n(n+1)}{2}$. Întrebarea este dacă avem drept să presupunem că legea pe care am găsit-o prin încercări sau din întîmplare și s-a potrivit în cîteva cazuri particulare ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$) este valabilă oricât de mare ar fi numărul n , de exemplu $n =$ cîteva zeci de mii de miliarde? Nu, desigur că nu avem acest drept. Numai Ahmozé putea proceda așa. Pe noi, Pitagora și urmașii lui ne-au învățat să demonstrăm orice afirmație! În cazul acesta, metoda pe care vom folosi-o pentru demonstrație poartă numele de *metoda inducției matematice* sau a

inducției complete. Se numește așa, fiindcă prin *inducție* se înțelege, în general, trecerea de la o judecată particulară la una generală. Așa am procedat și noi, vrînd să scriem formula generală pentru un număr oarecare „ n ”, folosind formulele numerice cunoscute în cazul cînd $n = 1, 3, 6$ sau 10 ! Însă nu întotdeauna această inducție conduce la adevăr, se cunosc multe exemple cînd generalizarea printr-o simplă inducție dă greș. Ca să ne convingem, să luăm un exemplu: numerele 20, 40, 60, 80 se divid cu 4. Am putea generaliza afirmînd că toate numerele terminate cu un zero se divid cu 4? Desigur că nu, ar fi fals, 30 nu se divide cu 4. De aceea *inducția*, ca atare, nu-i metodă de demonstrație, în schimb, *inducția matematică*, da. Înseamnă că dacă o lege se verifică pentru $n = 1$ și prin inducție o presupun adevărată pentru un n oarecare, așa cum am făcut noi, ca această lege să fie într-adevăr valabilă pentru acel n oarecare, trebuie să *dovedesc* că, înlocuind pe n cu $n + 1$, formula ce se obține are aceeași formă ca și cea de la care s-a pornit. Așadar, să aplicăm metoda inducției complete, ca să ne convingem că nu am greșit, generalizînd cazurile particulare.

Avem deci, pe de o parte suma numerelor de la 1 la $n + 1$ și, pe de alta, formula care

exprimă suma primelor n numere la care se va adăuga tot $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

sau, dînd ca factor comun pe $(n+1)$ se obține aceeași formulă ca și în cazul că suma ar fi fost dusă pînă la $(n+1)$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

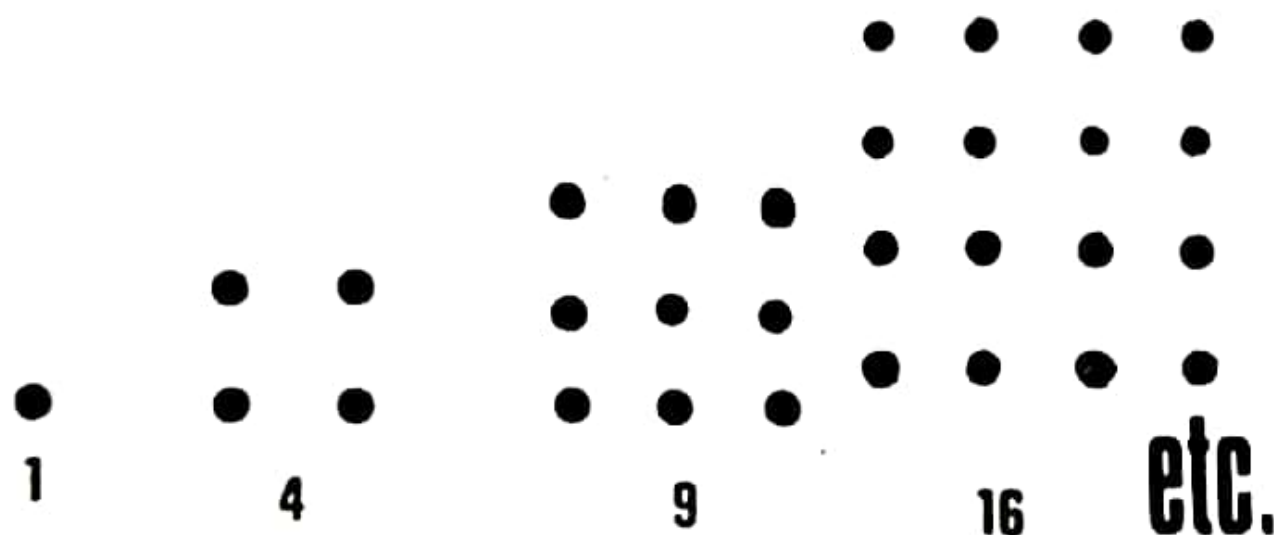
Să reținem această frumoasă metodă de demonstrație, fiindcă ea ne va scoate din multe încurcături.



Se povestește că odată a venit la Pitagora un negustor și l-a rugat să-l primească printre elevii lui. „Bine, i-a răspuns atunci Pitagora, și te voi învăța să numeri!” Dezamăgit de acest răspuns, negustorul a zis: „De numărat n-am nevoie să învăț, căci asta o știu eu foarte bine!” Pitagora a zîmbit și i-a cerut negustorului să numere. Acesta, foarte sigur de sine a început: „Unu, doi, trei, patru.” Cînd a ajuns la patru, Pitagora l-a întrerupt spunîndu-i: „Oprește-te aici, căci ceea ce consideri dumneata că este patru, este zece, un triunghi perfect și simbolul nostru.” Negustorul a tăcut rușinat, a înțeles că aceleași cuvinte pot avea semnificații deosebite în gura unui ignorant și a unui filozof. Cînd Pitagora a spus că-l va învăța pe negustor să numere el s-a gîndit că-l va face să cunoască *numerele triunghiulare*, ori, al patrulea număr triunghiular este $10 = 1 + 2 + 3 + 4$. Pentru întreaga sectă a pitagoreicilor numerele *patru* și *zece* aveau semnificații filozofice profunde.

fiindcă pe atunci se credea că Universul este format din *patru* elemente: apa, aerul, focul și pământul, iar *decada*, adică *zece*, era privită ca simbolul perfecțiunii numerelor, deoarece zece era baza sistemului de numerație. În același timp triunghiul care se exprimă prin numărul 10, fiind legat de decadă, era socotit perfect.

E firesc ca după numerele triunghiulare să urmeze *numerele patrate*. Ele se obțin așezând pietricelele ca să formeze patrate. Ori se observă că, după ce s-a format primul patrat din 4 pietricele, celălalt apare de îndată ce se mărginește acest patrat cu câte $2 + 3$ pietricele pe două din laturile alăturate. Dacă la patratul cu latura 3 se adaugă $3 + 4 = 7$ pietricele se obține în același mod un nou patrat și așa mai departe:



Legea de formare a acestor numere patrate e tot așa de simplă ca și aceea a numerelor triunghiulare și a fost descoperită tot în școala lui Pitagora:

$$1; 1 + 3 = 4 = 2^2; 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2; \\ \dots 1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2; \dots$$

Notînd un număr impar cu $2n + 1$, observăm că numerele patrâte se obțin ca suma numerelor impare consecutive. Așadar, prin inducție rezultă formula

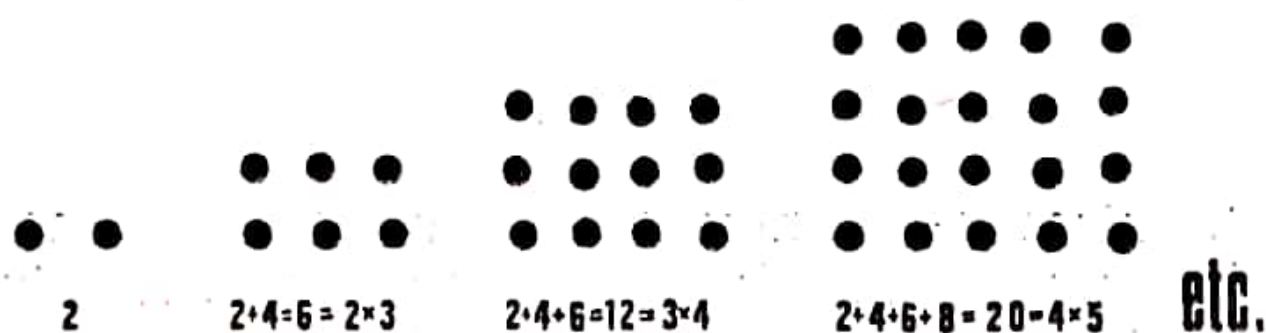
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Este ea adevărată? Metoda inducției matematice o va arăta! Avem:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) + [2(n + 1) + 1] = \\ = (n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 2n + 1 + \\ + 2n + 3 \text{ sau } : 1 + 3 + \dots + (2n + 3) = \\ = (n + 2)^2.$$

Numirea de numere triunghiulare nu se mai folosește acum decît de unii specialiști în teoria numerelor, dar aceea de *patrat*, în loc de *puterea a doua* a unui număr, s-a păstrat pînă azi. Ea își are originea și explicația în faptul că prin n^2 se reprezentau acele numere care corespundeau pietricelelor așezate în patrat. Pitagoreicii au mai găsit și alte șiruri de numere, care se formau tot după o anumită ordine, în care pietricelele formau un pentagon, un hexagon, un heptagon sau un alt poligon regulat. Acestea au fost numite, cu un cuvînt, *numere poligonale* și a fost stă-

bilită o formulă generală, prin care se exprima atunci cînd se specifica numărul de laturi ale poligonului. Pe acestea Euclid nu le amintește, în schimb, el definește *numerele plane*, cărora pitagoreicii le spuneau *dreptunghiulare*, deoarece toate numerele despre care s-a vorbit pînă acum sînt numere plane, ele fiind legate de poligoane plane. Numere dreptunghiulare se nasc din sumele succesive ale numerelor pare, iar modul lor de generare este ca și acela al patratelor, începîndu-se însă cu două pietricele:



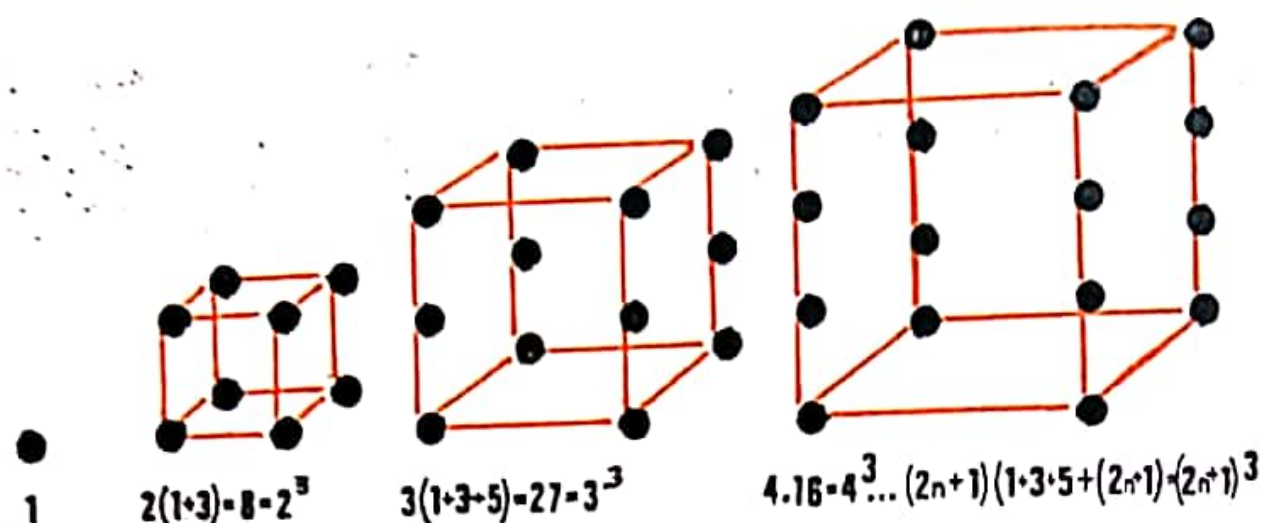
Prima carte în care au fost adunate cele mai multe dintre descoperirile numerice ale pitagoreicilor a fost scrisă de Nicomach din Gherasa (sec. I. e.n.) și poartă titlul: *Introducere în Aritmetică*. Deși nivelul științific al acestei cărți era inferior aceluia al Elementelor, lucrarea lui Nicomach a avut mult succes și a fost amintită secole de-a rîndul de diferiți comentatori, care neputînd scrie ceva mai bun se mulțumeau să o explice și să o interpreteze. Era epoca cînd Egiptul își pierduse independența și romanii nu au încurajat cercetările matematice. În secolul al VI-lea ea a fost

tradusă în limba latină și a fost folosită ca manual în învățămîntul superior. Iată o teoremă despre numerele figurate, așa cum se prezenta în cartea lui Nicomach: *Dacă un pătrat primește propria lui latură, el devine dreptunghi, adică, pe Zeus, este deposedat de propria lui latură!* Nu-i greu de rezolvat problema, dacă se notează numărul pătrat cu n : $n^2 + n = n \cdot (n+1)$, ori $n \cdot (n+1)$ este expresia unui număr dreptunghiular.

Formula generală a numerelor dreptunghiulare se stabilește prin inducție completă astfel: Fie $N = 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1)$. Adunînd în ambii membri numărul par următor, adică $(2n+2)$, avem:

$$2 + 4 + \dots + 2n + (2n+2) = n(n+1) + (2n+2) = n(n+1) + 2(n+1) = (n+1)(n+2).$$

În cartea a VII-a, Euclid mai definește și *numărul cub*, pitagoreicii însă au considerat mai multe soiuri de *numere solide*, adică de acel fel de numere care corespund la așezarea pietricelelor: așa ca să formeze o piramidă (*numere piramidale*), un paralelipiped (*numere paralelipipedice*) sau un cub (*numere cubice*). În acest din urmă caz, pietricelele sau punctele, care să le reprezinte, trebuie așezate în pături de patrate suprapuse unele peste altele:



După cum se observă, formula care corespunde la aceste *numere-cub* se exprimă prin puterea a treia a punctelor (sau pietricelelor) cuprinse pe o față a cubului. De aici a rămas numirea de *cub*, care se dă pînă azi numărului de această formă. Pe lîngă aceste diferite



Pe lîngă relația care amintește teorema lui Pitagora, dintre numerele consecutive 3, 4 și 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$) lui Platon i se atribuie o relație analoagă, ce leagă cuburile a patru numere consecutive 3, 4, 5 și 6 : $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

categorii de numere, pe care pitagoreicii le-au legat de figurile sau corpurile geometrice și de proprietăți specifice geometriei, ei au clasificat numerele și după criterii pur aritmetice, așa după cum am văzut cînd ne-am

oprit asupra numerelor pare sau impare cu derivatele lor, prime sau compuse. Din această ultimă mulțime de numere nu vom mai aminti aici decît despre *numerele perfecte*, fiindcă, după cît se pare ele l-au preocupat mult și pe Euclid. Iată ultima definiție din cartea a VII-a a Elementelor: *număr perfect e acela care este egal cu părțile sale*. Ce vrea să spună Euclid prin această formulare laconică? Prin părțile unui număr se înțeleg divizorii lui, așadar, *perfect* este un număr care are ca sumă a divizorilor lui chiar acel număr. Pitagora cunoștea două numere perfecte, pe $6 = 1 + 2 + 3$ și pe $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. După cum vedeți, divizorii lui 6 sînt tocmai 1, 2 și 3 iar ai lui 28 : 1, 2, 4, 7 și 14 ! Mai tîrziu a fost stabilită o teoremă prin care se preciza o clasă întreagă de numere perfecte. Această teoremă apare în cartea a IX-a din Elementele lui Euclid, și din ea rezultă că un număr natural n este *perfect* dacă are forma $n = 2^t (2^{t+1} - 1)$, unde t este un număr natural, iar diferența $(2^{t+1} - 1)$ trebuie să reprezinte un număr prim. Cu ajutorul acestei formule în antichitate s-au mai putut calcula încă două numere perfecte și anume numerele ce corespund la $t=4$ și $t=6$; $496 = 2^4 (2^5 - 1)$ și $8128 = 2^6 (2^7 - 1)$. Dar șirul lor nu s-a oprit aici. În cele peste

25 de veacuri, cîte au trecut de la Pitagora pînă azi, numerele perfecte au preocupat și preocupă încă pe matematicieni.



În Aritmetica lui Nicomach se găsesc primele patru numere perfecte, iar autorul discută distribuția lor în șirul numerelor naturale. Astfel el observă că există un singur număr perfect (6) printre unități, un singur număr perfect (28) printre zeci, unul (496) printre sute și tot un singur număr perfect (8128) printre mii. De aici el trage concluzia că cu cît se consideră numerele mai mari, cu atît numerele perfecte sînt mai îndepărtate unele de altele și, în adevăr, avea dreptate. Al cincilea număr perfect, care a fost calculat abia în secolul al XV-lea de matematicianul Regiomontanus, este egal cu 33 350 336, așadar se găsește abia printre zecile de milioane. Cu ajutorul calculatoarelor electronice au putut fi calculate cam vreo 20 de numere perfecte, ultimul, descoperit acum vreo zece ani, are peste 3000 de cifre și ca să fie imprimat trebuiesc 12 pagini. Problema numerelor perfecte nu se reduce numai la calcularea lor. Sînt încă întrebări care așteaptă răspuns. Una: Dacă nu există numere perfecte neperechi? Nu-i demonstrat că nu ar putea fi! Alta: Dacă singura formulă care să dea numerele perfecte este aceea stabilită de Euclid? Toate numerele perfecte calculate pînă acum au folosit această formulă veche de 22 de veacuri, și prin ea nu se pot găsi decît numere pare.

PE ACEEĂȘI ULICIOARĂ...



Zilnic trecea Pitagora pe ulicioara unde se afla atelierul potcovarului și de departe auzea larma ciocanelor izbite de sclavi în nicovală. Se învățase cu acele zgomote și

aproape că nici nu le mai băga în seamă atunci când gândurile lui frământau vreo problemă. Dar într-o zi, ajuns în dreptul potcovăriei, atenția i s-a îndreptat singură înspre sunetele ce veneau dintr-acolo, părăindu-i-se că ele se succed în cvarte, cvinte și octave. A rămas pe loc și a mai ascultat o dată, ca să se convingă și înțelegînd că era așa, a intrat în curte, curios să înțeleagă care ar putea fi cauza acestui fapt. A văzut atunci că erau patru sclavi care loveau pe rînd în nicovală, cu cîte un ciocan de mărime și greutate deosebită. Așa spune legenda că au început cercetările lui Pitagora asupra armoniei muzicale. Cît adevăr și cîtă fantezie este în această legendă, care dăinuie de peste 2500 de ani, nu s-ar mai putea stabili, dar cert rămîne faptul că în școala lui Pitagora au fost făcute experiențe de o importanță hotărîtoare în istoria fizicei-matematice asupra vibrațiilor coardelor bine întinse și s-au găsit legi ce au căpătat expresie matematică! Pitagora a descoperit astfel că înălțimea notelor emise de o coardă în vibrație depinde numai de lungimea acelei coarde bine întinse și se exprimă, într-un mod foarte simplu, prin raportul dintre lungimea coardei întregi și segmentul corespunzător unei anumite note. De pildă, ca să se obțină cvinta unei note

coarda trebuie apăsată la $\frac{2}{3}$ din lungimea ei, cvarta la $\frac{3}{4}$ din lungime, iar octava la $\frac{1}{2}$, adică la jumătatea coardei. Pitagora a construit astfel scara diatonică și a putut formula prima teorie matematică despre armonia muzicală. Se poate bănuși cât de mare a fost entuziasmul pitagoreicilor când au înțeles că se putea stabili o corespondență așa de precisă între sunete și numere, corespondență ce se putea exprima printr-un anumit raport dintre două numere naturale. Acest raport numit de greci *logos*, adevărea și întărea credința pitagoreicilor că *totul este număr*, pentru că raportul dintre două numere era în stare să exprime natura intrinsecă a sunetelor și esența însăși a armoniei muzicale! De aceea ei au dat o largă dezvoltare cercetărilor din aritmetică și geometrie legate de



După cum s-a mai observat, Pitagora și ceilalți matematicieni greci nu admiteau printre numere și *raportul a două numere*, adică priveau numerele fracționare ca pe niște *mărimi* și nu ca numere. În privința aceasta se poate spune că celelalte popoare din orientul antic au intuit mai clar noțiunea de număr decât grecii. Ca să poată opera cu numerele fracționare, grecii le-au considerat drept mărimi fizice sau geometrice. Ei au legat așa de adânc noțiunea de număr fracționar de intuiția geometrică, încât abia în secolul al XVII-lea s-au făcut primele încercări de a desprinde concepția de număr de orice influență geometrică.



Și azi, prin *analogie*, se înțelege o potrivire, o concordanță între două relații sau două sisteme puse față în față. În tot cursul evului mediu și chiar până în secolul al XVII-lea în matematici ideea de proporționalitate, de analogie, era considerată diferită de ceea ce se putea exprima printr-o egalitate sau ecuație și de aceea se continua chiar folosirea unor semne speciale pentru a însemna o proporție. Anume, ceea ce se notează azi prin $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se nota atunci astfel $a : b : c : d$. De pildă, în lucrările scrise de Kepler, Galileu și Huygens se găsește acest fel de notații pentru proporții. Acela care s-a ridicat împotriva acestor diferențieri în notarea egalităților matematice a fost filozoful și matematicianul G. W. Leibniz. El scria: „Am fost întotdeauna contra faptului de a se nota cu semne speciale rapoartele și proporțiile, din cauză că pentru notarea raportului ajunge semnul diviziunii, iar pentru proporție acela al egalității”.

raportul a două numere și chiar de egalitățile ce se puteau forma între rapoartele a trei și patru numere. Egalitatea dintre două rapoarte adică proporția a fost numită de ei *analogon* și de aici vine cuvântul *analogie*, care se traduce chiar prin: *să aibă același raport*. Printre aceste proporții, pitagoreicii au studiat și câteva de o natură particulară, anume acelea în care era vorba de determinarea unei mărimi *medii* b , între două mărimi date a și c , mărimi care de obicei se considerau a fi segmente de dreaptă. Astfel ei deosebeau următoarele medii:

media aritmetică, definită prin proporția:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} \text{ de unde } b_A = \frac{a+c}{2}$$

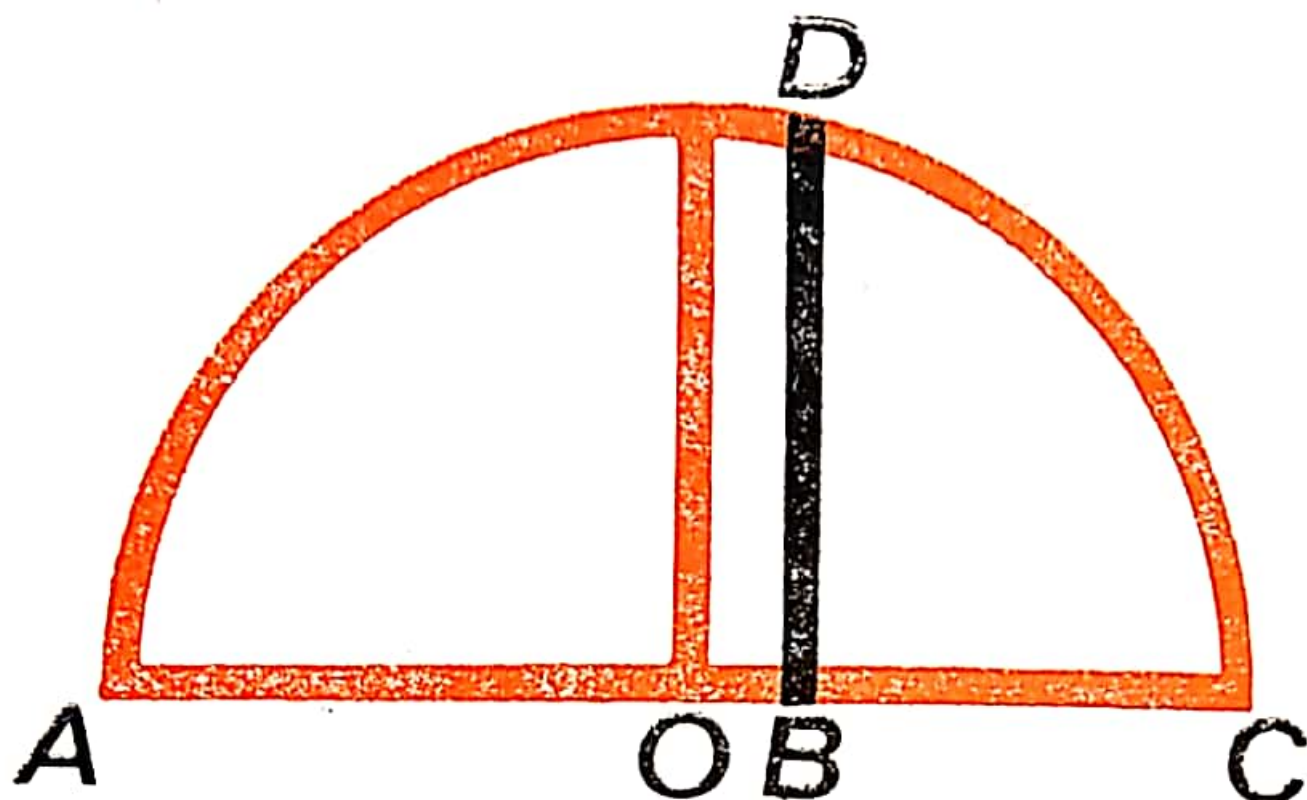
media geometrică, definită prin proporția:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \text{ de unde: } b_G = \sqrt{a \cdot c}.$$

media armonică, definită prin proporția:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c} \text{ de unde } b_H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}} = \frac{2a \cdot c}{a+c}$$

Aceste *mărimi medii* între două mărimi date a și c nu au toate aceeași valoare numerică. De pildă, media aritmetică este mai mare decât media geometrică. Iată o demonstrație simplă care pune în evidență aceasta: Fie cercul O de diametru $AC = a + c$, unde $AB = a$ și $BC = c$. Dacă din punctul B de pe diametru se ridică perpendiculara BD , pînă ce întâlnește cercul, atunci, din geometrie se știe că BD este medie geometrică între segmentele a și c , adică avem $BD = \sqrt{a \cdot c} = b_G$. Dar BD este mai mică decât raza OA . Din construcție avem că diametrul cercului este $a+c$, așadar raza OA este $\frac{a+c}{2}$. Se poate scrie deci:



$$\sqrt{a \cdot c} < \frac{a + c}{2}.$$

Media geometrică era încă numită și *porție continuă*, fiindcă ea se mai putea scrie sub forma $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, adică numitorul din primul raport se *continua* ca numărător în cel de al doilea. Euclid a considerat ca un caz separat acele medii geometrice în care segmentele a , b , c nu erau independente între ele, ci unul dintre ele, de pildă „ a ” se considera a fi suma celorlalte două ($a = b + c$). În acest caz, formula devine $\frac{b + c}{b} = \frac{b}{c}$. Euclid spunea că segmentul $a = b + c$ este împărțit în *raport extrem* și

mediu, dar din secolul al XV-lea o asemenea împărțire a unui segment se numește *tăietură de aur*. Numirea a fost dată de Leonardo da Vinci, care a vrut să pună astfel în evidență că, dacă într-o figură se găsesc segmente care se află între ele în raport extrem și mediu, acea figură lasă impresia de frumos și armonie.

Media armonică a căpătat acest nume din cauza legăturii pe care a avut-o, la pitagoreici, cu legile consonanței muzicale. Anume, dacă se consideră drept unitate lungimea unei coarde care emite un anumit sunet, atunci, după cum s-a mai spus, octava acelui sunet este la $\frac{1}{2}$ din această lungime. Media armonică dintre aceste două numere

$$b_H = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

reprezintă cvinta acelui sunet. Pornind de la cele trei medii: arit-



Numerele 6, 8 și 12, care sînt în proporție armonică, au fost puse de pitagoreicul Philolaos în legătură cu aspectul armonios al cubului. Un cub are 6 fețe (toate egale și patrate), 12 muchii și 8 vîrfuri.

metică, geometrică și armonică, ale celor două mărimi a și c , Pitagora le-a combinat între ele, impunând condiția ca numerele a și c să fie în așa fel, încât cele trei medii să formeze o proporție, în care media geometrică să aibă drept termeni extremi pe celelalte două medii. Așadar folosind notațiile de mai înainte trebuie să existe proporția:

$$\frac{b_G}{b_H} = \frac{b_A}{b_G} \text{ sau } \frac{\sqrt{ac}}{\frac{2a \cdot c}{a+c}} = \frac{\frac{a+c}{2}}{\sqrt{ac}}$$

Sau încă:

$$\frac{a}{\frac{2 \cdot a \cdot c}{a+c}} = \frac{\frac{a+c}{2}}{c}$$

Pitagora a numit această proporție *proporția perfectă* sau *proporția muzicală*, fiindcă ea leagă împreună cele 4 distanțe care despart sunetele fundamentale din gama diatonică (numită după aceea și gama lui Pitagora). Intr-adevăr pentru o coardă de lungime unitate, corespunzătoare unui sunet dat, octava lui este la $\frac{1}{2}$ din lungimea corzii și, considerînd aceste numere $a = 1$ și $c = \frac{1}{2}$, celelalte două numere care stabilesc proporția

perfectă dau distanțele corespunzătoare pentru cvintă $\left(\frac{2}{3}\right)$ și cvartă $\left(\frac{3}{4}\right)$:

$$\frac{\frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \text{adică :} \quad \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$$



Pitagora a arătat, prin relațiile ce le-a stabilit între intervalele ce despart notele muzicale, că o coardă, ce corespunde unui anumit sunet, se împarte în părți neegale, anume în părți stabilite de proporția muzicală. Împărțirea unei coarde în intervale de lungime egală duce la disonanță. Într-adevăr în acest caz notînd cu x lungimea comună a acestor două intervale, proporția muzicală se scrie astfel:

$$\frac{\frac{1}{2x^2}}{2x} = \frac{\frac{2x}{2}}{2} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

iar de aici rezultă: $x^2 = 2$ sau $x = \sqrt{2}$

Rezultă de aici că valoarea ce ar trebui să aibă această lungime fiind $\sqrt{2}$ nu se mai exprima prin raportul a două numere întregi, ci printr-o mărime despre care pitagoreicii nu puteau spune nimic; această mărime descoperită prin secolul al V-lea î.e.n. arăta că nu totul se poate exprima prin numere (întregi), cum afirmau pitagoreicii. De aceea ei au numit $\sqrt{2}$ o mărime *alogos* (ce nu se poate exprima prin *logos*, adică printr-un raport de două numere) sau, tradus în latinește, *mărime irațională*.

Studiul proporțiilor și al valorilor medii a fost încurajat de Pitagora fiindcă a găsit în aceste expresii un mijloc matematic de a formula legile armoniei și a ordinii care există în Univers. Cu acest înțeles de „Univers în care domnește ordinea” au inventat și folosit pitagoreicii cuvântul *cosmos*, spre deosebire de *haos*, care însemna *dezordine*. Teoria generală a proporțiilor a fost stabilită mai târziu de Eudoxus din Cnidos (sec. IV î.e.n.), învățătorul și prietenul lui Platon. Cît de încîntat trebuie să fi fost Platon, cînd a aflat de la Eudoxus că segmentele a, b, c, d formează o proporție: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ numai dacă ariile dreptunghiurilor, unul avînd ca



Pitagoreicii au putut exprima prin mediile geometrice și armonice legile armoniei, aceleași nu numai în muzică, ci și în arhitectură, sculptură, sau celelalte arte, legi pe care artiștii le-au cunoscut dintotdeauna în mod intuitiv, după cum tot intuitiv au găsit și această corespondență a elementelor care exprimă armonia în diferitele arte. De pildă, intervalul muzical (acordul dintre două note) se traduce în arhitectură prin raportul dintre două segmente, sau două suprafețe ori volume, după cum acordului muzical (combinații de trei sau mai multe note) îi corespunde ansamblul unei opere bine proporționate și, tot așa, armonia muzicală poate fi pusă în corespondență cu elementele de simetrie ce se degajă din alte opere de artă.

dimensiuni a , d și celălalt b , c , sînt egale ($ad = bc$), se poate bănuî din sarcasmul ce se desprinde din aceste cuvinte care vizau proporțiile, scrise în *Republica* la adresa aceloră ce nu cunoșteau decît *logistica*: „ei schimbă unitatea în bani mărunți și împart acolo unde învățații înmulțesc“. Teoria lui Eudoxus se află în cartea a V-a a lui Euclid din *Elemente*, carte care a stîrnit cea mai adîncă admirație a savanților din toate timpurile, dar și cele mai multe comentarii, carte care nu a putut fi pe deplin înțeleasă decît în veacul al XIX-lea, după ce au mai fost clarificate unele aspecte curioase ale noțiunii de număr.

Deși proprietățile mediilor au fost stabilite de pitagoreici din interes pur teoretic, conform devizei lor: *o figură și un pas înainte, nu o cifră ca să cîștigi trei parale*, în zilele noastre aceste rezultate au găsit importante și numeroase aplicații practice, noțiunea de *mărime medie* fiind generalizată pentru cazul mai multor numere. Astfel dîndu-se n numere, (n un întreg finit, dar oricît de mare), numere care se notează pentru comoditate cu $a_1, a_2, \dots, a_n$, se numește:

Medie aritmetică:
$$M_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

Medie geometrică: $M_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$

Medie armonică: $M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$

Cu mărimi medii se lucrează în cele mai multe și variate dintre domeniile de activitate ale vieții social-economice și științifice: în economie, planificare, biologie, fizică etc., adică oriunde intervin mulțimi de elemente și calcule statistice. Problemele ce se pun sînt legate de cunoașterea, în fiecare caz în parte, a celeia dintre formulele medii care prezintă cel mai real avantaj. Această medie poate fi una dintre acele formule numite aici sau dintre altele, care, prin specificul lor, nu se încadrează în această expunere elementară. Ca să se poată răspunde la aceste întrebări trebuie să se țină seama de mărimea valorilor date de fiecare din aceste expresii. Una am stabilit-o, ea se menține și în cazul general, anume că media aritmetică a unei mulțimi de n valori este mai mare decît media geometrică calculată cu aceleași elemente. Referindu-ne la proporția perfectă, din ea se poate deduce media armonică care se obține împărțind patratul mediei geometrice prin media aritmetică. Prin urmare, media armonică este mai mică decît media geometrică

a elementelor considerate. Avem deci următorul șir de inegalități:

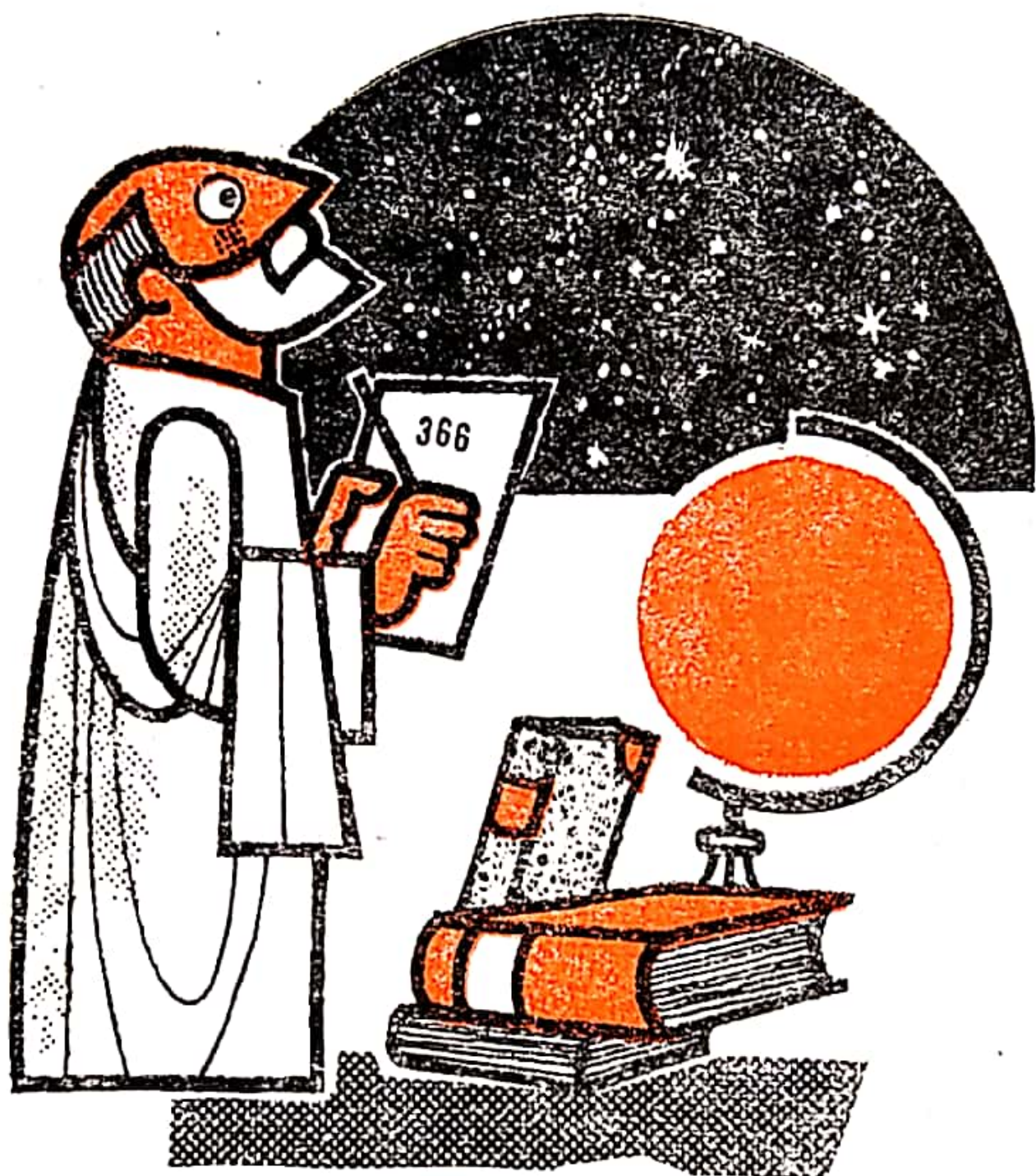
$$M_a > M_g > M_h.$$



CALCULE DE DRAGUL CALCULELOR?

Răsfoind *Elementele* lui Euclid, cea mai răspândită carte de matematici din lume, rămânem surprinși că nu găsim în ea nici un calcul numeric! În cărțile lui de geometrie nu se arată cum se calculează lungimea cercului, nici aria unui triunghi, nici volumul unui con, ca și cum asemenea probleme nu ar exista, iar în cărțile lui de aritmetică, nici pomeneală de vreo adunare, înmulțire

sau împărțire! Și totuși, calculele numerice nu preocupau numai pe negustori, ci chiar și pe unii dintre marii matematicieni contemporani lui Euclid. De pildă, alături de problemele teoretice, lui Arhimede i-a plăcut să rezolve probleme practice și să facă lungi și grele socoteli. El a scris o carte, intitulată *Psamit sau numărarea firelor de nisip*, în care a arătat cum se poate stabili un sistem de numerație cu baza 10 000 (o *miriadă*) și nu 1 000, cum este în sistemul nostru. După ce a considerat diferitele unități de ordin superior, de pildă o miriadă de miriade, căreia noi îi spunem, ca și Arhimede, o *octadă* fiindcă în notația exponențială — se scrie 10^8 , el a arătat cum se poate calcula și a calculat, în mod practic, numărul firelor de nisip care ar umple întreg Universul, considerat de el că se întinde pînă dincolo de Soare, atingînd sfera stelelor fixe, căreia el îi atribuie un diametru de 10^{12} ori mai mare decît cel al orbitei pămîntești. Tot Arhimede a arătat cum se calculează în mod practic aria și lungimea unui cerc de rază dată. A făcut aceasta, fiindcă i-o ceruse prietenul său Eratostene care, ca să poată calcula raza Pămîntului, avea nevoie să determine cît mai exact cu putință lungimea unui arc de meridian, așadar a unui arc de cerc. Eratostene era astronom



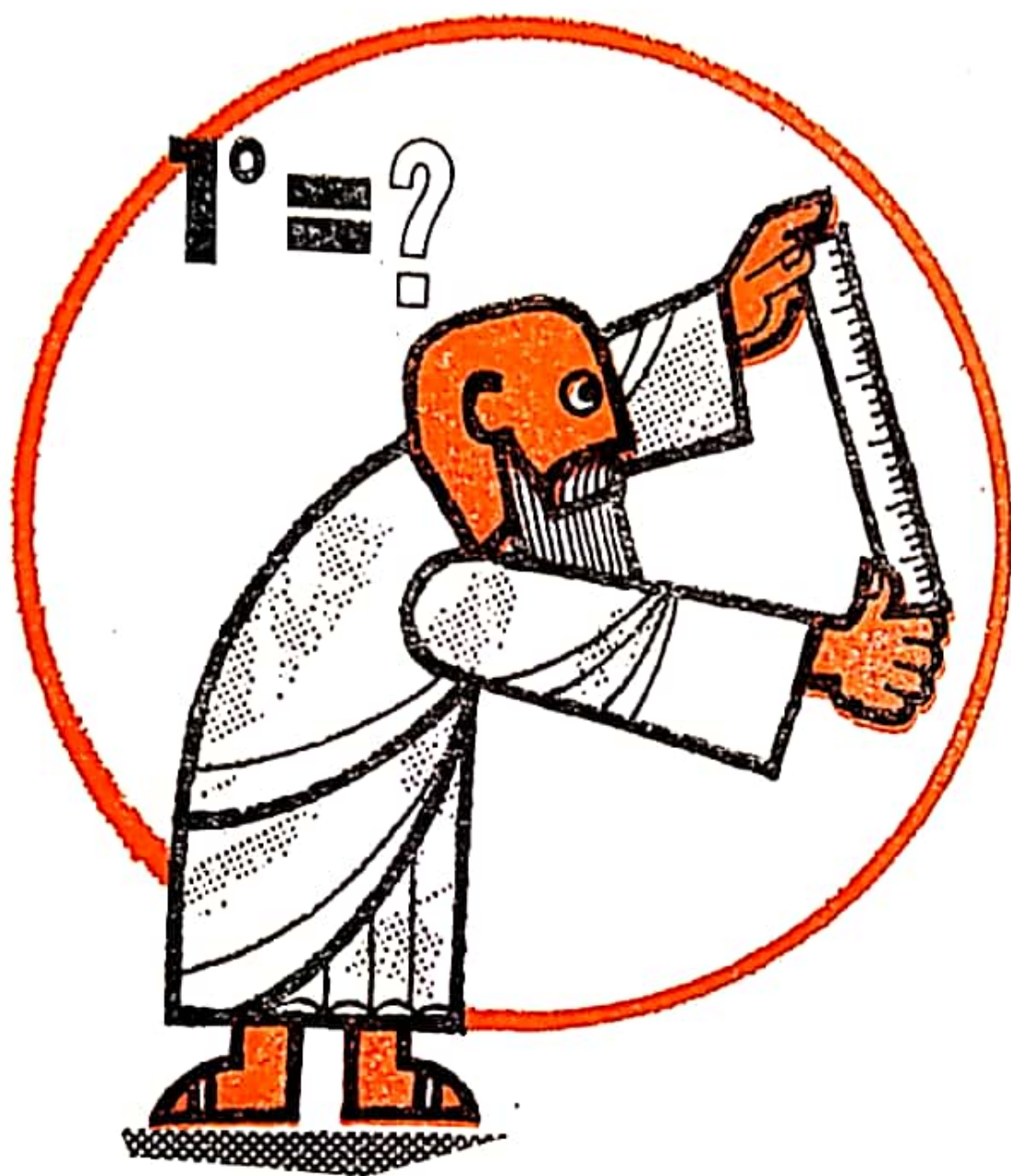
și, în această calitate, era obligat să facă nenumărate socoteli prin care determina zilnic pozițiile stelelor și ale planetelor observate noapte de noapte, cu aparatele construite chiar de el. Mai mult, alte calcule nesfârșite

i-au dat posibilitatea să corecteze vechiul calendar egiptean de 365 de zile, introducînd anul de 366 de zile adică încă o zi, o dată la 4 ani (an bisect). Aşa fiind, cui i-ar mai putea trece prin minte că Eratostene mai găsea încă timp ca să facă şi alte calcule, numai aşa de dragul calculelor? Şi totuşi... de numele lui este legată expresia „ciurul lui Eratostene“, fiindcă de la el ne-a rămas prima tabelă de numere prime de la 1 la 1000 ! Acest *ciur* rămîne un exemplu de calcule făcute în mod dezinteresat, numai din plăcerea de a cunoaşte proprietăţile numerelor şi de a contribui astfel la dezvoltarea ştiinţei despre numere. Evenimentele care au urmat după cucerirea Greciei şi a Egiptului de către romani nu au mai fost prielnice dezvoltării ştiinţelor matematice pure şi nici a aritmeticii. Din ce în ce mai mult se impuneau executarea calculelor de natură practică, cerute de noua organizare socială, precum şi acelea legate de nevoile astronomiei şi ale navigaţiei atunci în dezvoltare. În particular, pentru a se putea stabili cu cît mai multă precizie poziţia astrelor pe sfera cerească, asemenea calcule fiind obligatorii în problemele de măsurare a timpului, era necesar să se calculeze şi să se înscrie în tabele valorile arcelor şi ale coardelor de cerc, corespunză-

toare unghiurilor la centru ce le subîntind, unghiuri care să difere între ele cel mult cu minute dacă nu chiar cu secunde de arc. O asemenea tabelă de coarde ale arcelor de cerc a fost calculată de un urmaş al lui Eratostene, anume de Hiparch (secolul II î.e.n.), socotit a fi fost cel mai mare astronom din timpul său, dar ea s-a pierdut. În schimb ni s-a păstrat o altă tabelă de coarde, mai completă, calculată de un alt astronom grec renumit, Claudiu Ptolomeu (secolul II), tabelă care se află în cartea de astronomie compusă de el și cunoscută azi sub numele *Almagesta*. O tabelă de coarde nu-i un lucru ușor de calculat. E vorba de stabilit lungimile laturilor poligoanelor regulate, înscrise într-un cerc de rază unu, adică într-un cerc în care



Claudiu Ptolomeu (100–168) a intitulat cartea sa *Syntaxa mathematica* sau *Culegeri matematice*. Ea era formată din 13 cărți și ca să se deosebească de o altă scriere mai mică a lui, care servea de introducere la aceasta, se mai numea și *Marea compunere* (*Megisti syntaxis*). În secolul al VIII-lea *Syntaxa* a fost tradusă de arabi și i s-a dat titlul de *Almagisti*, cuvîntul fiind compus din articolul specific arab *al*, la care a fost alăturat termenul grecesc *megisto*, iar în secolul al XII-lea, cînd textul arab a fost tradus în latinește, traducătorii i-au păstrat acest titlu arab, numind-o *Almagesta*.



raza cercului devine unitatea de lungime cu care se măsoară laturile poligoanelor considerate. Acele poligoane însă nu sînt triunghiuri echilaterale, patrute sau hexagoane, adică poligoane cu trei, patru sau șase laturi, a căror lungime se află printr-un calcul elementar ce se poate învăța din orice carte de

geometrie, ci poligoane cu un număr foarte mare de laturi. Arhimede a fost primul care a arătat cum se fac asemenea socoteli complicate, în cazul unui poligon regulat cu 96 de laturi. Urmînd aceeași metodă Ptolomeu a găsit lungimea unei laturi și mai mici, anume aceea a poligonului regulat cu 120 de laturi înscris în cerc și apoi chiar a poligonului cu 360 de laturi. Cît îi de mare o asemenea latură? Cît un punct dacă se desenează un cerc cu o rază de 1 cm. El a calculat lungimea ei cu o aproximație dusă pînă la a cincea zecimală! Cunoscînd lungimea laturii poligonului regulat cu 360 de laturi (sau a coardei de 1°), Ptolomeu a calculat pe rînd valorile tuturor celorlalte coarde de 2° ; de 3° , ... pînă la 180° , ultima coardă fiind egală cu diametrul cercului. El a înscris toate aceste valori într-o tabelă de coarde, arătînd cum se pot găsi și lungimile coardelor pentru valori intermediare, ca, de pildă, lungimea coardei ce subîntinde unghiul de $18^\circ 6'$, lungime cuprinsă între aceea a coardei de 18° și 19° .

Fiindcă astronomi și observatoare astronomice se aflau în multe țări, mai ales din Orientul îndepărtat sau apropiat, tabelele lui Ptolomeu au fost copiate și folosite peste tot; fie așa cum erau, fie calculîndu-se, după

modelul lor, altele mai perfecționate. Așa, de pildă, prin secolul al III-lea, chinezii aveau tabele de coarde care aveau la bază calcule făcute pentru latura poligonului cu 3072 de laturi, adică a unei laturi aproape de 10 ori mai mică decât aceea considerată de Ptolomeu! Matematicienii hinduși, au inventat o nouă mărime mai avantajoasă în calcule decât coarda, anume, *jumătatea coardei* care subîntinde un unghi la centru. Această mărime este numită azi *sinusul unui unghi*. Hindușii au calculat *tabele de sinus*, care, cu timpul au înlocuit pretutindeni tabelele de coarde. Tot hindușii au făcut și multe alte descoperiri în domeniul numerelor. Cea mai importantă a fost scrierea numerelor în sistemul zecimal pozițional, scriere ce exista în India pe la începutul secolului al VII-lea. Spre sfârșitul secolului următor, ambele descoperiri au ajuns în țările ocupate de arabi. Ei au tradus în limba arabă și cartea lui Ptolomeu și cărțile hinduse. Înțelegând marele avantaj al scrierii poziționale, arabii au introdus această nouă metodă nu numai în lucrările matematice, ci și în calculele comerciale. Ca să ne putem da seama de greutatea imense pe care trebuiau să le întâmpine toți cei ce foloseau celelalte sisteme de scriere ale numerelor, e de ajuns să amintim că nu-

merele grecești fiind scrise prin litere, traducerea tabelelor de coarde trebuia transcrisă, traducînd valoarea numerică a fiecărei litere grecești prin litera arabă care avea acea valoare! Așa s-a procedat în prima traducere a Almagestei. Folosirea scrierii poziționale a permis însă arabilor să calculeze cea mai precisă tabelă de sinusuri din vremea aceea, anume în secolul al XV-lea a fost compusă o tabelă de sinusuri a cărei precizie ajungea pînă la a 17-a zecimală. Aceasta înseamnă că poligonul înscris în cerc, a cărui latură a fost calculată, avea peste 800 de milioane de laturi! În Europa, tabelele de sinusuri au fost aduse mai întîi în Spania, de către maurii care s-au stabilit acolo și care aveau legături comerciale cu arabii din Orient, dar prin secolul al XI-lea s-au calculat tabele noi, chiar la observatoarele astronomice de acolo. Astfel au fost vestitele tabele numite *toledane*, traduse în secolul al XII-lea în latinește. Apoi în secolul al XIII-lea au apărut alte tabele, la fel de renumite, numite *tabelele alfonsiene*, după numele regelui Alfons al X-lea, care s-a îngrijit de alcătuirea lor.

În executarea tabelelor astronomice nu se mai poate vorbi de calcule făcute de dragul calculelor, ci de calcule făcute cu un anumit scop. Aceste tabele au cerut ani întregi de

lucru încordat din partea acelor care s-au hotărât să le ducă la capăt. Ele au fost întocmite pentru că, fără de ele, nu s-ar fi putut executa alte calcule și mai complicate. Și totuși cei ce calculau nu se simțeau împovărați de munca lor fiindcă toți acei ce se dedică acestei munci iubesc numerele și, atrași de vraja lor, nici nu știu când trece vremea.



UN NUME CU BUCLUC

Cuvântul *algorithm* a apărut în Europa prin secolul al XIII-lea și, de bine de rău, se

admitea că înseamnă *procedee de calcul*, atunci când numerele erau scrise în sistemul pozițional, adică cu cifrele arabo-hinduse. Dar de unde, venea acest cuvânt, lucrurile nu s-au putut lămuri decât în secolul al XIX-lea, după lungi și încâlcite presupuneri, când, de fapt cuvântul fusese aproape părăsit. Azi, el este din nou întrebuințat însă cu un înțeles deosebit de acela de acum câteva veacuri. De aceea se cuvine, poate, să-i urmărim povestea.

Matematicianul Muhammed Ibn Musa al Horezmi, adică originar din localitatea Horezm, care a trăit prin secolul al IX-lea, a compus mai multe lucrări, dintre care un loc aparte îl ocupă două dintre ele, aceea despre



aritmetică și aceea despre algebră, nu numai prin conținutul lor, ci și pentru că de la ele se trag numirile de *algoritm* și de *algebră*. Ambele au fost traduse în secolul al XII-lea din limba arabă în latinește, dar, atât traducerea cât și originalul primei lucrări s-au pierdut și nu mai există decât niște copii, atât după scrierea arabă cât și după cea latinească. În limba arabă se pare că titlul ei era *Carte despre adunare și scădere după sistemul hindus* și trata despre procedeul de scriere a numerelor cu ajutorul a nouă cifre și a semnului pentru zero, arătându-se cum se pronunță numerele mari prin denumirea unităților de diferite ordine și apoi cum se efectuează cele patru operații. Descrierea lor era urmată de numeroase exemple. După traducerea în limba latină a acestei cărți trebuie să fi circulat, începând din secolul al XII-lea, multe copii sau prelucrări, fiindcă pe atunci apar și primele universități în Europa occidentală, iar aritmetica și geometria făceau parte dintre obiectele ei de studiu, grupate sub numele de *cvadrivium*. Una dintre aritmeticele cele mai răspândite era, prin 1230, cartea lui Sacrobosco, profesor la Universitatea din Paris, avînd ca titlu: *Tratat despre arta numărării sau Algorism*. O altă fusese scrisă la Toledo, chiar de autorul tabelelor

toledane și avea un titlu asemănător *Cartea Algorismului despre practica aritmeticii*. Tot din acel secol mai există o altă lucrare cu titlul: *Cartea introducerii Algorismului în arta astronomică*. Totodată se mai executau încă și numeroase copii după *Cartea abacului*, scrisă în secolul al XI-lea de Bernelius, unde se găsea descrierea abacului și metodele de a face operațiile când numerele erau scrise cu cifre romane. Ca să se deosebească între ele, cărțile ce tratau despre sistemul pozițional se numeau „despre *algoritm* sau *arta lui Alcharismi*“, iar cele referitoare la abac și cifrele romane „despre *abac* sau *Aritmetica lui Boethius*“. Partizanii primei metode purtau și numele de *algoritmiști*, iar ceilalți de *abaciști*. Cu timpul, pe când numărul abaciștilor a început să scadă, termenul de *abac* a con-



A.M.S. Boethius (480–524) a fost un filozof roman de o largă popularitate, nu atât prin meritele lui matematice, cât prin cele filozofice și politice. În închisoare el a tradus în latinește Aritmetica lui Nicomach și a mai scris o *Introducere în aritmetică*, în care se descriau metodele de calcul cu ajutorul abacului. Această carte a fost copiată și adăugită în cursul veacurilor, păstrând totuși numele lui Boethius, chiar și atunci când cu titlul *Regulele de calcul pe abac* a fost rescrisă de către învățatul Gerbert (940–1003), devenit apoi Papa Silvestru II.

tinuat să fie folosit, dar nu cu înțelesul original, de *instrument de calcul*, ci cu acela de *arta calculului* sau de *aritmetică practică*, înlocuindu-se prin el cuvântul *logistică* ce se pare că nu prea era agreat. O dovadă limpede ne-o oferă cartea compusă în 1202 de Leonardo Fibonacci, intitulată *Cartea abacului*,



Leonard din Pisa (1170–1250) este considerat ca cel mai mare matematician din secolul al XIII-lea și printre cei mai de seamă din întregul ev mediu. El era fiul lui Bonaccio, negustor din Pisa, ce fusese trimis ca notar în Algeria la Bougie, unde se afla o casă de comerț. Aici fiul său a învățat sistemul de numerație arab și apoi, în călătoriile de afaceri, pe care le-a făcut prin Egipt, Siria, Grecia, Sicilia și sudul Franței, a putut stabili toate avantajele acestui nou sistem față de celelalte sisteme de calcul folosite. Aceasta l-a făcut să întocmească *Liber abaci*, prima carte originală atunci, în acest domeniu. Faima lui de matematician era așa de mare încît împăratul Frederic II a dorit să-l cunoască. De aceea a organizat la Pisa, în 1225, un turnir matematic, pe care l-a prezidat el, și Leonard a fost invitat să ia parte.

În ziua concursului i s-a propus următoarea problemă:

„Să se afle un număr patrat astfel că, dacă din el se scade sau se adună 5, să rămîie tot un patrat”.

Se spune că Leonard a dat pe loc răspunsul, arătînd că acel număr este :

$$11 + \frac{2}{3} + \frac{1}{144} = \left(\frac{41}{12}\right)^2$$

Într-adevăr:

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2 \quad \text{și} \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$$

unde, cuvîntul *abac* are înțeles de „socoteală” sau „calcul cu numere scrise în sistemul pozițional”. Leonardo a compus această carte, pe care a prelucrat-o și a refăcut-o în 1228, ca să arate cît de simplă și folositoare este noua metodă a aritmeticii poziționale și a cifrelor hinduse. Ca să fie cît se poate de convingător, el alege numerele pe care le scrie în paralel, cu cifre romane și cu cele hinduse. De pildă numărul $MMMCCCXXI = 4321$. Apoi arată cum se fac operațiile de înmulțire și de împărțire cu numerele scrise cu cifrele hinduse și insistă asupra avantajului de a le putea executa *direct pe hîrtie*, fără a cere ajutorul abacului. În același timp, el a explicat și proba cu 9, pentru verificarea operațiilor. După aceste operații, autorul s-a ocupat și de procedeele ce se aplică în problemele de aritmetică comercială și care con-



Una dintre problemele grele, pe care le ridica în secolul al XIII-lea scrierea pozițională și care făcea ca abacul să-și păstreze încă susținători, era aceea că hîrtia costa foarte mult. Pînă în secolul al XIV-lea nu au existat fabrici de hîrtie în Europa și hîrtia se importa din China. Chiar și mai tîrziu era scumpă fiindcă ea se fabrica din petece de bumbac, iar papirusul și pergamentul erau la fel de greu de obținut.

duceau, în particular, la regula de trei simple sau compusă. Deși aceste reguli nu erau explicate, nici denumite, se arăta metoda de a stabili proporțiile prin care se rezolvă asemenea probleme. Cărțile lui Fibonacci au circulat prin copii manuscrise și au avut o mare influență asupra dezvoltării ulterioare a aritmeticii. După inventarea tiparului, la sfârșitul secolului al XV-lea au apărut și primele cărți de aritmetică practică tipărite, purtând titlul de *Algoritm*. Astfel în 1488 s-a tipărit cartea lui Sacrobosco *Algoritmul vulgar*, în 1534 a apărut cartea lui Jordanus Nemorarius *Algoritmul explicat*, scrisă de el în limba latină. În 1570 lucrarea s-a retipărit, tradusă în limba franceză. Tot în acest secol se mai tipărește cartea lui Beldomani *Tratat de algorism*, foarte util și necesar ș.a.



În secolul al XIII-lea problemele în care apăreau operații de înmulțire și de împărțire cu fracții păreau foarte greu de înțeles, fiindcă noțiunea de număr era legată în mod intuitiv de numerele întregi. Asume, părea foarte curios și de neexplicat de ce prin înmulțirea unui număr cu o fracție subunitară rezultatul apărea ca un număr mai mic decât întregul și din contră, cînd se înmulțea numărul cu o fracție supraunitară, se obținea un număr mai mare decât numărul dat. Aceeași problemă o puneau și împărțirea unui număr cu o fracție.



Noțiunea de *operator* a fost introdusă în mod sistematic în matematici abia în secolul al XIX-lea de către George Boole (1815–1864) în lucrarea sa *Cercetare asupra legilor gândirii*, deși operatorii înșiși au fost introduși în matematici, din cele mai vechi timpuri. Operatorul este un simbol al unei anumite operații matematice, astfel că prin aplicarea lui la o mărime dată să se obțină o altă mărime, nouă. De pildă, *zero* este un operator (în afară de faptul că este un număr) fiindcă adăugat la dreapta unui număr efectuează dintr-o dată înmulțirea lui cu zece și îl transformă astfel într-un număr de zece ori mai mare. De exemplu 0 aplicat în dreapta lui 5 îl transformă în 50. La fel γ^- este un operator, căci aplicat unui număr sau unei expresii date o transformă în alta. De exemplu, din 25 prin operatorul γ^- se obține 5 sau din $(a+b)^2$ prin operatorul γ^- se obține $a+b$.

Din titlurile acestor cărți, tipărite prin secolele XVI și XVII, apare clar că pe atunci înțelesul cuvântului *algoritm* era acela de calcul făcut cu creionul pe hîrtie, între numere scrise în sistemul pozițional, cu cifrele de la 1 la 9, la care se adaugă *zero*, care nu-i numai cifră și număr, dar și *operator*. Nu tot așa de clar se putea însă răspunde la întrebarea: De unde vine acest nume? În prima carte de algebră tipărită la noi în țară, anume *Algebra* scrisă de Gh. Asachi și care a apărut la Iași în 1837, se găsește informația că numele de *algoritm* vine de la numele unui rege Algor. O altă variantă, mai veche, se află

într-o aritmetică din veacul al XVI-lea, în care se afirmă că a existat un filozof cu numele *Albus* sau *Argus* și de la acesta se trage cuvîntul algoritm. Adevărata explicație a fost găsită de orientalistul J. Reinaud, și anume, că numirea are ca origine interpretarea greșită dată de vreun copist traducerii în latinește a localității Horezm (al-horezmi), unde se născuse Muhamed, fiul lui Musa, autorul cărții de Aritmetică tradusă în secolul al XII-lea în latinește. Această explicație a fost acceptată în mod unanim abia în 1857, cînd s-a descoperit în biblioteca Universității din Cambridge o copie, făcută în secolul al XIV-lea, așadar două veacuri mai tîrziu, după traducerea cărții lui Muhammed al Horezmi, care începe cu cuvintele „Dixit Algorithmi“, din care rezultă greșeala celui ce a copiat manuscrisul, confundînd numele localității cu acela al autorului! Din veacul al XVII-lea însă, odată ce sistemul pozițional a fost pe deplin asimilat nu mai exista nici un motiv ca să se mențină deosebirea ce se făcea pînă atunci între calculele stabilite cu o notație sau cu alta, a numerelor. De altfel atenția matematicienilor se îndrepta acum, tot mai mult către studiul algebrei. Însuși Fr. Viète (1540–1603), cel ce descoperise calculul literal și era

întrucâtva fondatorul algebrei, făcea deosebire numai între *logistica* (calculul) *numerică* și *logistica* (calculul) *literală* sau, cum spunea el, *logistica formelor*. Cuvântul *algorithm* își pierde astfel treptat puterea de circulație, fiind înlocuit cu *Aritmetică practică*. În același timp se adăugă pe lângă termenul simplu de *Aritmetică* (în înțeles de *Aritmetică teoretică*) un termen nou creat *Aritmetica universală*, adică *literală*, pentru algebră. În secolul XVIII, termenul *algorithm* rămâne doar, ca o reminiscență, în denumirea operației de împărțiri succesive a două numere, cunoscut și azi ca *Algoritmul lui Euclid*. În secolul nostru, însă, după construirea mașinilor electronice de calcul, care lucrează după un



Prima aritmetică, ce a apărut în limba română, are ca titlu *Ducere de mână către Aritmetică* și s-a tipărit în 1777 la Viena, avînd textul în românește și în limba germană. La Iași a fost tipărită prima aritmetică în 1795 de către Amfilohie Hotiniu iar în București, *Aritmetica teoretică* de L. Francoeur tradusă de I. Heliade Rădulescu (1802–1872), a apărut în 1832. În Biblioteca Academiei Republicii Socialiste România se păstrează și manuscrisele altor două aritmetici vechi. Primul manuscris din 1793, Țara Românească, este o traducere din grecește a Aritmeticii lui Glizonios din Hios, tipărită pentru prima oară în secolul al XVI-lea la Veneția, iar celălalt, a fost compus în Moldova, în 1795, de către Matei Millo, bunicul actorului Matei Millo.

program stabilit dinainte, în care se descriu operațiile ce trebuie executate de mașină și ordinea în care ele trebuie executate, cuvântul *algorithm* a apărut convenabil pentru a fi folosit cu acest nou înțeles. Micul nostru dicționar enciclopedic îl definește astfel: *Ansamblu de simboluri și de operatori folosiți în matematici și în logică permițând găsirea în mod mecanic (prin calcul) a unor rezultate.*

Un alt nume cu bucluc este și *algebra*. El își are originea tot într-o carte a lui Muhammed al Horezmi, tradusă în latinește în secolul al XII-lea, avînd ca titlu: *Scurtă carte despre calculul al-jabr și al-mucabala*. Aceste nume, care au fost latinizate în *algebră* și *almucabala*, indicau cele două operații considerate atunci fundamentale pentru ca ecuațiile de gradul I și II să se aducă la forma cea mai simplă: *al-jabr* (algebră) arăta că se trec termenii cu semnul minus dintr-un membru al ecuației în celălalt, ca toți termenii să fie cu semnul plus, *al-mucabala* arăta că se reduc toți termenii asemenea la unul singur. Cu timpul, însă, prima denumire, aceea de *algebră*, s-a aplicat la întregul proces de rezolvare a ecuațiilor și astfel din secolul al XVII-lea cuvîntul *algebră* a intrat în mod definitiv ca nume al unei ramuri a matema-

ticilor, aceea care se ocupă cu rezolvarea ecuațiilor.



Plăcerea de a calcula era răspândită nu numai între matematicieni, astronomi sau calculatori de profesie. Existau o mulțime de intelectuali care își petreceau zilele calculând, ca, de pildă, așa-numiții *cvadraturiști* (cei ce se ocupau cu cvadratura cercului). Printre aceștia este interesant să-l amintim pe Ludolph van Ceulen (1539—1610), care era un calculator înnăscut, adică avea talentul de a executa cu repeziciune din minte operații foarte complicate. El a determinat latura unui poligon regulat înscris în cerc, având peste 32 miliarde de laturi și a stabilit astfel, după câțiva ani de socoteli, primele 35 de zecimale exacte ale numărului π . La dorința lui aceste zecimale i-au fost gravate pe piatra de pe mormântul său.

UN TRĂSNET DIN SENIN

La început, prin secolul al XII-lea, după ce algoritmiștii scriau cu ușurință orice număr în sistemul pozițional și făceau adunările sau scăderile pe hîrtie, înmulțirile erau încă un hop greu de trecut fiindcă nu le venise în minte că ar trebui să învețe tabla înmul-

țirii, de la 1 la 100, pe de rost. Din această cauză ei înmulțeau cam tot așa ca pe vremea egiptenilor, adică prin duplicare sau folosind o tabelă de patrate. De exemplu, dacă aveau de înmulțit pe 27 cu 42, operațiile decurgeau astfel: întâi se descompunea 42 în $27 + 15$ și în felul acesta, prin înmulțire cu 27 se obținea primul patrat: $27 \times 42 = 27 \times (27 + 15) = 27^2 + 27 \times 15$. Înmulțirea s-a descompus astfel în suma dintre patratul lui 27 și produsul 27×15 , cu care se continua metoda arătată, pînă se găsea ultimul pătrat:

$$27 \times 42 = 27^2 + (15 + 12) \times 15 = 27^2 + 15^2 + 12 \times 15 = 27^2 + 15^2 + 12(12 + 3).$$

$$\text{Așadar } 27 \times 42 = 27^2 + 15^2 + 12^2 + 36.$$

Patratele numerelor 27, 15 și 12 erau citite direct într-o *tabelă de patrate de la 1 la 100* și, făcîndu-se adunarea, se afla produsul:

$$27 \times 42 = 729 + 225 + 144 + 36 = 1134.$$

Dacă se nimerea un patrat mai mare decît 100, de exemplu 118^2 , atunci el era descompus în altul sub 100, în felul următor:

$$118^2 - 18^2 = (118 - 18)(118 + 18) = 100 \times 136 = 13600$$

$$\text{Așadar } 118^2 = 18^2 + 13600 = 324 + 13600 = 13924.$$



Nu se poate spune că metoda nu ar fi fost ingenioasă, numai că ea cerea tot atîta timp cît și abaciștilor ca să facă înmulțirea pe abac. Peste cîteva secole, după ce și copiii știau tabla înmulțirii, iar abaciștii erau așa

de rari că trebuiau căutați cu lumînarea, altă pacoste se abătuse pe capul calculato-
rilor. Perfecționarea navigației și, odată cu
ea, dezvoltarea comerțului pretindeau multe
și multe înmulțiri și împărțiri. Dar și noile
metode de înmulțire cereau mult timp. Ele
nu se efectuau dintr-o dată, așa ca adunările,
ci se compuneau din cîteva operații separate
ce se încheiau cu o adunare. Și apoi încă,
pentru a controla atenția sau gradul de obo-
seală, trebuia făcută *proba cu 9*! Să urmărim,
de pildă, cazul unei înmulțiri nu prea com-
plicate, produsul a trei numere întregi $4739 \times$
 $\times 543 \times 87\ 238$. Mai întîi produsul primelor
două numere se compune din patru operații
separate: trei înmulțiri parțiale cu 3, 4 și 5,
apoi adunarea acestor produse și după aceea
proba cu 9:

$$\begin{array}{r} 4739 \times 543 \\ \hline \end{array}$$

$$14217$$

$$18956$$

$$23695$$

$$\hline 2573277$$

Proba cu 9

$$4 + 7 + 3 + 9 = 23$$

$$5 + 4 + 3 = 12$$

$$2 + 3 = 5$$

$$1 + 2 = 3$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$1 + 5 = 6$$

$$2 + 5 + 7 + 3 + 2 + 7 + 7 = 33 \quad \underline{3 + 3 = 6}$$

Rezultatul odată verificat, înmulțirea se continuă în același mod, dar de data aceasta ca să se stabilească produsul intervin 6 operații și mai lungi: cinci înmulțiri cu 8,7,2,3,8 și o adunare după care urmează o nouă verificare! Or, aceste calcule nu se făceau numai așa, câteodată, ci ele erau cerute oră de oră, zile și ani întregi, pentru a se face, de pildă, din ce în ce mai precise tabelele astronomice sau de sinusuri, fără de care întoarcerea corăbiilor acasă ar fi fost imposibilă. Astronomul G.I. Rheticus (1514–1576) a calculat 18 ani neînterupt, din 1551 pînă în 1569 o tabelă care dădea valorile sinusului din 10 secunde în 10 secunde de arc, exacte pînă la a 11-a zecimală. Aceste tabele, cunoscute sub numele „Opus palatinum” (fiindcă s-au tipărit pe cheltuiala Curții princiare), au apărut după moartea autorului, în 1596, și, lucru neașteptat, ele nu foloseau numai astronomilor și navigatorilor ca să rezolve problemele lor în legătură cu observațiile de stele sau planete, ci și aceora care aveau de făcut înmulțiri numeroase! Cum și de ce? Fiindcă un matematician, de la începutul veacului al XVI-lea, a avut într-o zi o idee strașnică,

aceea că ar putea transforma înmulțirile în adunări și împărțirile în scăderi, dacă ar folosi o tabelă de sinusuri! Existau întradevăr niște formule, care permiteau să se transforme un produs de două sinusuri într-o sumă, așa că o bună și precisă tabelă de sinusuri putea face această minune. Era de ajuns să se transforme numerele în sinusuri, apoi acestea să se adune și, după aceea, sinusul obținut să fie din nou preschimbat în număr, număr care însemna tocmai produsul căutat! Metoda nu era chiar așa de ușoară și nici așa de simplă cum ar părea, dar avea farmecul ei fiindcă în loc să înțelește atenția de înmulțiri, o mai elibera, preschimbând-o într-o muncă oarecum mecanică de căutare a sinusurilor în tabele, de transcriere a numerelor după care urma o adunare sau o scădere și apoi din nou folosirea tabelelor pentru transformarea sinusului. Un mare matematician al timpului a găsit chiar cuvinte de admirație pentru această metodă, spunând că „este plină de plăceri și satisfacții!”

Rheticus nu a fost singurul om care, plăcându-i calculele, a petrecut 18 ani în tovărășia lor. Nu! pe atunci când nu exista nici tren, nici automobil, nici avion, nici cinematograf, nici telefon, nici radio, nici T.V.,

calculele numerice apăreau ca un mijloc atrăgător și amuzant de a petrece timpul. Izolat în castelul său, din apropierea Edimburgului, John Neper (1550 – 1617), baron de Merchiston, a petrecut așa douăzeci de ani, fără ca nimeni să bănuiască la ce rezultate ar putea să-l conducă socotelile cu care-și bătea capul. Dar după 20 de ani, el a prezentat omenirii una dintre cele mai frumoase descoperiri matematice: *Tabelele de logaritmi*. Aceste tabele de logaritmi au apărut în 1614 la Edimburg sub titlul: „*Descrierea regulilor de aplicare a minunațiilor logaritmi*”. Și avea într-adevăr dreptate Neper când i-a numit *minunați*, fiindcă cine avea o tabelă de lo-



garitmi la îndemână prefăcea într-o clipă, și fără a mai folosi sinusul, înmulțirea în adunare, împărțirea în scădere, dar și mai mult, transforma orice ridicare la putere într-o simplă înmulțire a logaritmului numărului cu exponentul puterii și, orice extragere de rădăcină, *de orice ordin*, în împărțirea logaritmului cu indicele rădăcinii. Această din urmă operație nici nu s-ar fi putut altfel executa atunci când indicele ar fi fost mai mare decât 3! Descrierea lui Neper arăta cum se caută în tabele logaritmul unui număr dat și, invers, cum se găsește numărul, dacă se știe logaritmul lui, dar cum a descoperit Neper acest lucru nu a aflat nimeni, despre aceasta nu a scris nici în tabelele publicate în 1614 și nici în cartea următoare, tipărită după moartea lui, în 1619, sub titlul: *Construirea minunaților logaritmi*. Cuvântul *logarithm*, inventat de el, se compune din *logos* = raport, relație și *arithmos*, așadar are înțeles de *raport corect* sau *armonios* (între număr și logaritmul lui). Apariția logaritmilor a fascinat pe matematicieni. Un contemporan al lui Neper scria: „Invenția logaritmilor a venit ca un trăsnet din senin. Nici o operă dinainte nu ne-a putut face să o prevedem. Ea stă izolată, străbătînd pe neașteptate mintea omenească fără să împrumute nimic

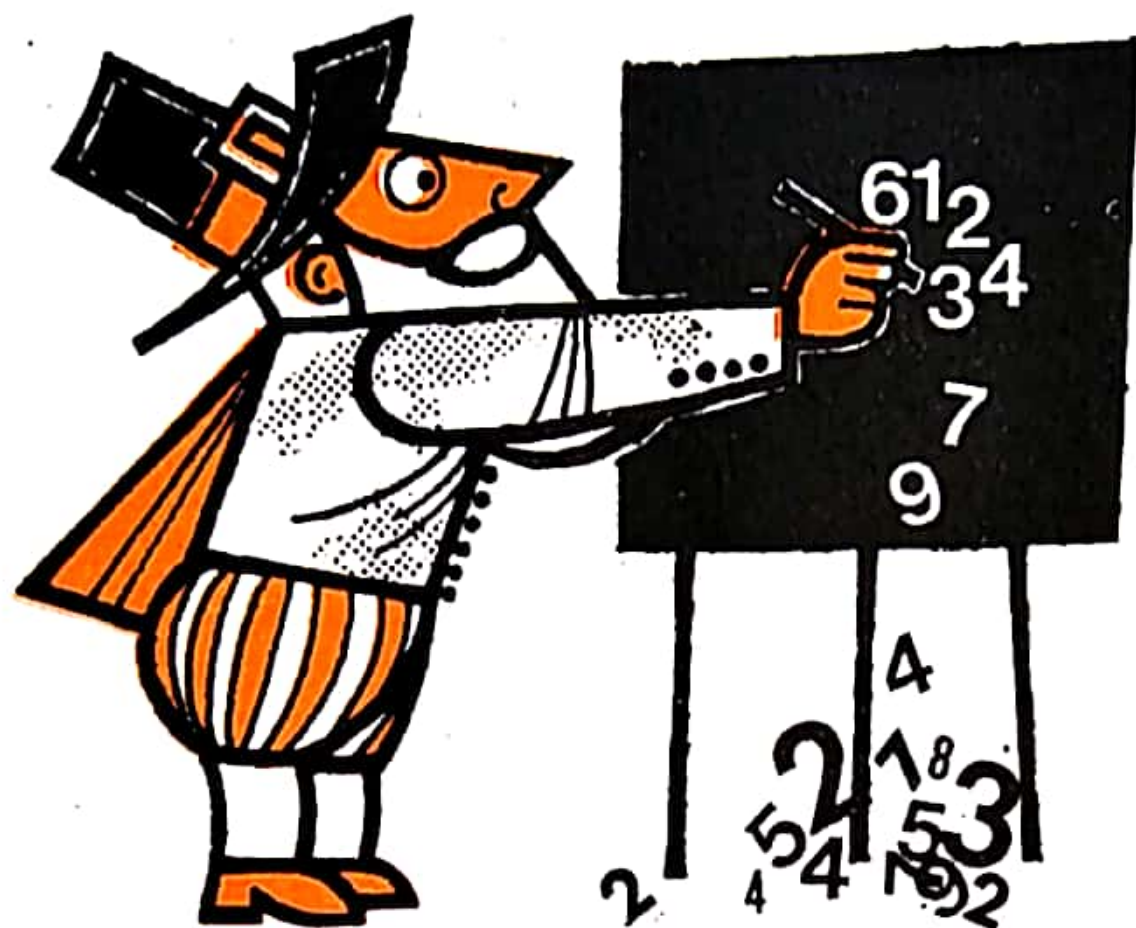
din metoda altor învățați sau să urmeze vreun drum cunoscut al gândirii matematice". Azi, tabela de logaritmi calculată de Neper pare mai greoaie decît aceea pe care o folosim noi, tabela de logaritmi zecimali, calculată cîțiva ani mai tîrziu de Henry Briggs (1550—1630), profesor de matematici la Cambridge, care, fermecat ca și atîția alții de logaritmi lui Neper, a dorit să exprime astfel adorarea! „Prin noii și admirabilii lui logaritmi, Neper, baron de Merchiston, m-a copleșit cu totul. N-am cunoscut niciodată o carte care să-mi placă mai mult și să-mi producă mai multă mirare“, a mărturisit H. Briggs unui prieten, înainte de a se hotărî să plece în Scoția ca să-l poată vedea și să poată discuta cu Neper. A făcut-o peste un an; la întrevvedere a asistat și un cunoscut de al lui Neper, care a notat cum a decurs întrevvederea: „După ce Briggs a fost condus în



Entuziasmul stîrnit de apariția logaritmilor se poate constata și din faptul că au existat calculatori care s-au străduit să stabilească logaritmi unor numere cu 48 de zecimale exacte sau cu 61 de zecimale, ba, cineva a calculat 192 de zecimale ale logaritmului unui număr. Desigur că asemenea performanțe nu erau cerute de nici un fel de probleme științifice sau de ordin practic, ci doar de impulsul cu care alții ar fi executat o operă de artă!

camera lui Neper, a trecut aproape un sfert de oră fără ca vreunul să scoată o vorbă, fiecare privindu-l pe celălalt cu admirație". Probabil că, la sugestia lui Neper, Briggs a calculat logaritmi zecimali care prezintă mai multe avantaje din punct de vedere practic și chiar sînt mai ușor de folosit. În schimb, logaritmi calculați de Neper au o largă aplicație în problemele teoretice, atît din matematici, cît și din științele aplicate.

Briggs a calculat timp de nouă ani aceste noi tabele și ele au apărut la Londra, în 1624, sub titlul: *Aritmetica logarithmica*. Tot în același an s-a tipărit și la Marburg o altă tabelă de logaritmi zecimali, calculați de celebrul astronom J. Kepler (1571—1630), pornind și el, ca și Briggs, dar fără să știe unul de altul, de la logaritmi lui Neper și, după cum se vede, lucrînd cu aceeași viteză. „Logaritmi, scria Kepler, au dublat viața astronomilor.” Tabelele de logaritmi, atît neperieni, cît și zecimali, au fost tipărite îndată, mai întîi în toate țările din Europa occidentală, apoi s-au răspîndit pretutindeni, fiind de multe ori recalculați sau prezentați într-o formă îmbunătățită. Către sfîrșitul secolului al XVIII-lea, o echipă de astronomi și matematicieni francezi, dintre care făcea parte și A.M. Legendre (1752—1833), a re-



calculat logaritmi cu 12 zecimale exacte cu scopul de a-i folosi la determinarea arcului de meridian. După aceste tabele, care au fost păstrate în manuscris, Serviciul geografic al armatei franceze a tipărit, în cea mai frumoasă execuție grafică din câte existau pe atunci, tabele de logaritmi cu 8 zecimale exacte.

Contemporan cu John Neper, în Praga, matematicianul de origine elvețiană, Jobst Bürgi (1552–1632) calcula și el o tablă de logaritmi, bazându-se pe aceleași prin-

cipii ca și Neper. Tabelele, care au fost tipărite în 1620 sub numele *Tabele cu progresii aritmetice și geometrice*, au trecut atunci neobservate... cine mai avea ochi să vadă alte tabele în afară de „minunații logaritmi”, chiar dacă ar fi fost vorba de aceeași minunați logaritmi și poate mai simplu de folosit? Nici chiar Bürghi n-a protestat, căutînd să-și pună în evidență opera sa, la fel de frumoasă ca a lui Neper și executată independent de a lui Neper, ci s-a resemnat, împăcîndu-se cu soarta lui. Poate că dacă Neper ar fi trăit și ar fi aflat adevărul, el singur ar fi făcut dreptate, dar nici Neper nu s-a bucurat de triumful operei sale, căci el a murit, la numai doi ani după ce s-au tipărit minunații logaritmi.



Într-un preafrumos articol scris de Ion Ionescu (1870–1946), care, printre alte merite a avut și pe acela de a fi fost unul dintre stîlpii *Gazetei Matematice*, povestește: „Eram în clasa a IV-a primară, cînd vîd la un anticar o aritmetică mare și jerpelită, pe care am luat-o pe un preț de nimica. Mă duc spre casă, o răsfoiesc și vîd pe la sfîrșit un capitol despre logaritmi, la care se spune că aceștia pot înlocui înmulțirile și împărțirile prin adunări și scăderi. De bucurie că am să scap de fioroasele înmulțiri cu numere complexe, la care stînjeai cubici, însoțiți de palme, degete și liniile lor cubice se înmulțeau cu lei, parale și lăscăi... nu știu cum am

ajuns acasă. Logaritmiile mi-au arătat atunci una dintre frumusețile pe care matematica le are ascunse într-însa și mi-au dat imboldul să mai caut și altele... faptul că acum îmi petrec din orele libere cu studiul unor chestiuni de știință... se datorește în prima linie transformării pe care au produs-o în mine logaritmiile, la o etate la care impresiile produse se șterg greu". În această duioasă mărturisire apare și informarea istorică asupra învățămîntului matematicilor înainte de introducerea sistemului metric (zecimal) în țara noastră. După cum se știe, România a fost una dintre primele țări din lume care a adoptat sistemul metric, prin legea din 1866. Dar în mod practic sistemul metric a fost aplicat din 1880, adică tocmai pe cînd Ion Ionescu era elev în cursul primar.

DIN NOU LA ȘCOALA LUI PITAGORA

Vrăjiți de farmecul și noutatea logaritmiilor, matematicienii din multe țări se întreceau unii cu alții în rîvna de a-i recalcula, de a-i verifica, de a-i îmbunătăți sau de a le stabili noi interpretări teoretice ori aplicații practice. Existau însă și unii matematicieni care nu s-au lăsat prinși în acest iureș, fiindcă pentru ei numerele continuau să păstreze înfățișarea pe care le-o arătase, odinioară, Pitagora. Așa se face că în timp ce în castelul din Merchiston John Neper calcula de zor

logaritmiilor numerelor, la Paris, Bachet de Méziriac (1587—1638), membru al Academiei franceze, se străduia, cu aceeași ardoare ca și Neper, să traducă cât mai exact, în latinește, limba cultă a secolului — primele șase cărți de aritmetică și singurele care s-au păstrat din cele 13 pe care le scrisese renumitul matematician grec Diofant din Alexandria. Cu doi ani mai înainte de apariția Tabelelor de logaritmi, Bachet de Méziriac tipărise o carte intitulată: *Probleme plăcute și distractive ce se rezolvă cu ajutorul numerelor*, iar în 1621 a apărut *Aritmetica lui Diofant*, care, pe lângă textul original grec, cuprinde traducerea în limba latină și un amplu comentariu asupra problemelor ce se aflau în carte, multe dintre ele fiind legate de proprietățile numerelor întregi. Asemenea probleme, care au delectat odinioară pe pitagoreici, au trezit din nou curiozitatea și interesul matematicienilor. Printre aceștia se numără și Pierre Fermat (1601—1665), considerat ca cel mai mare matematician al secolului al XVII-lea și unul dintre fondatorii teoriei moderne a numerelor. Sînt multe probleme despre numerele întregi de care s-a ocupat Fermat, de pildă aceea a numerelor prime. Azi, numerele prime de forma $N_n = 2^{2^n} + 1$ se numesc *numerele prime ale lui*

Fermat, după cum numerele prime de forma $N_p = 2^p - 1$ se numesc *numerele prime ale lui Mersenne*; Mersenne a fost unul dintre prietenii lui Fermat. Dintre toate problemele de teoria numerelor cercetate de Fermat vom aminti una singură, *problema numerelor prietene*. Această problemă a fost pusă odinioară de însuși Pitagora și a plăcut așa de mult încît, de atunci înainte, a continuat să preocupe pe mulți matematicieni, iar în epoca noastră să se recurgă chiar și la mașinile electronice de calcul, ca să i se afle noi soluții.

Legenda spune că odată a venit la Pitagora cineva și l-a întrebat cum ar trebui să fie doi oameni ca să se poată numi cu adevărat prieteni. Pitagora i-a răspuns: „Să fie unul față de celălalt așa cum sînt și numerele 220 și 284, fiecare dintre aceste numere fiind egală cu suma părților celuilalt, adică, fiecare fiind un alt eu“. Ca să înțelegem mai



Pierre Fermat nu și-a publicat rezultatele cercetărilor sale. Cele mai multe dintre ele au fost găsite de către fiul său Samuel și publicate de el. Însă o parte dintre aceste cercetări le-a comunicat chiar Fermat, prin scrisori, prietenilor săi. În legătură cu problemele despre numere, foarte multe dintre descoperirile lui au fost notate pe marginea albă a filelor din cele 6 cărți ale lui Diofant, traduse de Méziriac.

bine ce a vrut să spună Pitagora, să descompunem întâi aceste două numere în factori primi: $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ și $284 = 2^2 \cdot 71$. Prin *părțile unui număr* se înțeleg toți divizorii lui, printre care se cuprinde și unu. Rezultă așadar că trebuie făcută suma părților, adică a tuturor divizorilor celor două numere. În felul acesta se stabilește că:

divizorii numărului 220 dau, prin adunare, numărul 284:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 11 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284, \text{ iar suma divizorilor lui } 284 \text{ dă pe } 220:$$

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Deși aceste două numere au fost mult îndrăgite, nu numai de matematicieni, ci și de toți cei ce aveau oarecare interes pentru probleme cu numere, din vremea lui Pitagora și pînă la Fermat nu s-a mai găsit o altă pereche de numere care să aibă proprietatea numerelor prietene. De ele s-au ocupat și matematicienii arabi, renumiți prin talentul lor matematic, iar astronomul și matematicianul Tabit ibn Korra (sec. IX) a stabilit o formulă prin care s-ar putea calcula alte numere prietene; anume el a scris: „Dacă se pot afla trei numere întregi, p , q , r , toate prime între ele, care să fie de forma:

$p=3 \cdot 2^n - 1$, $q=3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r=9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, unde n să fie un număr întreg mai mare decât unu, atunci perechile de numere:

$A=2^n \cdot p \cdot q$ și $B=2^n \cdot r$ sînt prietene“. Se verifică ușor că perechea găsită de Pitagora corespunde cazului $n=2$, însă, nici Tabit, fiul lui Korra și nici alții nu au mai găsit alte numere prietene care să verifice formula amintită, formulă pe care nici Fermat și nici un alt matematician european nu o cunoștea pentru că în secolul al XVII-lea nu se traduseseră încă lucrările compuse de matematicienii care au scris în limba arabă. Pe Fermat l-au preocupat mult aceste două numere și pînă la urmă a reușit să formeze o nouă pereche de numere prietene. Atunci, într-o scrisoare pe care a adresat-o savantului călugăr iezuit M. Mersenne (1588–1648), foarte îndrăgostit și el de probleme cu numere, i-a comunicat descoperirea, arătîndu-i că numerele $A=2^4 \cdot 23 \cdot 47$ și $B=2^4 \cdot 1151$, adică $A=17\,296$ și $B=18\,416$ sînt numere prietene. Mersenne, care era în corespondență cu cei mai mulți dintre matematicienii timpului, fiind renumit prin rolul lui de animator, a comunicat îndată descoperirea lui Fermat. Cît de mult a interesat aceasta se poate stabili din scrisorile rămase de atunci pline de întrebări adresate lui Mersenne și altora.



De altfel peste doi ani, R. Descartes (1596 – 1650), rivalul întru glorie al lui Fermat, nu s-a lăsat mai prejos, comunicându-i și el lui Mersenne a treia pereche de numere prietene, anume $A=2^7 \cdot 191 \cdot 384=9\,363\,584$ și $B=2^7 \cdot 73\,727=9\,437\,056$. Amîndouă aceste perechi de numere prietene au fost publicate în anul 1644 de către Mersenne, în cartea care a apărut atunci, avînd ca titlu: *Meditații fizico-matematice*. După cum se vede, ambele perechi de numere verifică formulele stabilite de Tabit ibn Korra, una pentru $n=4$ și cealaltă pentru $n=7$. Peste vreo sută de ani și marele matematician L. Euler s-a prins în mrejele numerelor prietene. Într-un articol publicat în 1747 el adaugă la cele

trei perechi cunoscute pînă atunci alte 30 de perechi noi, dar nici el nu arată cum le-a dedus. Abia după moartea lui s-a găsit o lucrare, pe care a scris-o în 1750 și a rămas nepublicată, în care Euler stabilea o metodă de a găsi asemenea perechi de numere și, totodată calcula încă alte 31 de perechi, dintre care două au fost găsite ulterior ne-exacte. Iată dar că, în timp ce unii matematicieni se sileau să construiască tabele de logaritmi, alții căutau perechi de numere prietene. Erau însă și dintre acei care s-au lăsat captivați și de logaritmi și de numerele prietene. De exemplu A.M. Legendre, care, după cum am văzut, făcea parte din comisia de recalculare a logaritmilor, a găsit și el următoarea pereche de numere prietene:

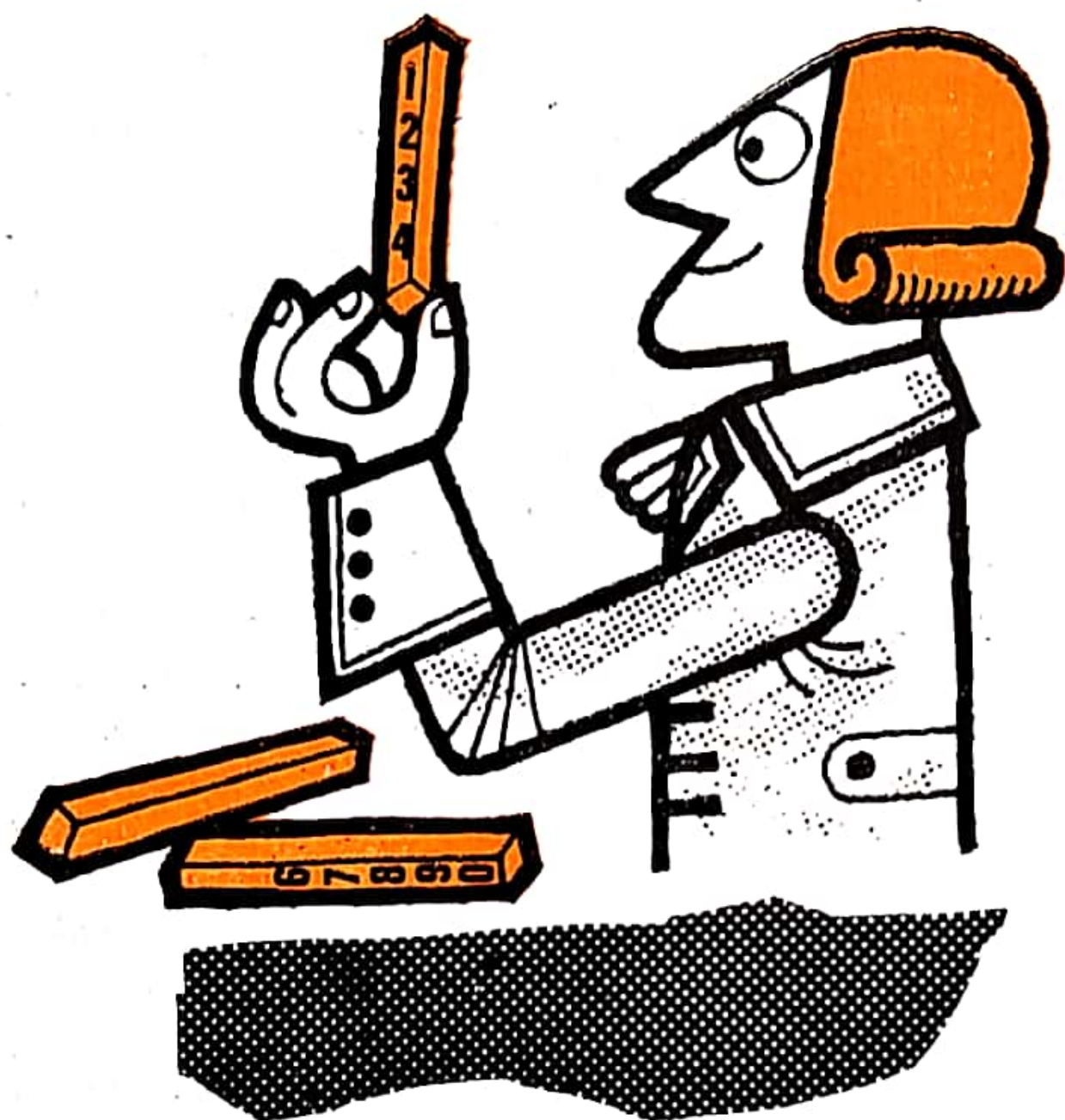
$$A=2^8.257.33\ 023 \quad B=2^8.8\ 520\ 191.$$

Acum logaritmii nu mai trezesc entuziasm și nici interes. Tabelele de logaritmi se folosesc, ca și alte tabele numai atunci cînd nu sînt necesare mijloace mai rapide de calcul, mijloace ce au fost descoperite în secolul nostru. Dar numerele prietene au rămas la fel de atrăgătoare ca și pe vremea lui Fermat și Descartes. Pînă la începutul secolului XX au fost găsite 66 de perechi, iar în secolul nostru s-au mai calculat peste 300 de perechi

noi de numere prietene și, problema nu-i închisă. Din când în când, prin revistele de teoria numerelor se mai găsesc amatori care anunță noi perechi de numere prietene sau care stabilesc alte formule pentru a le calcula.

TOATE-S VECHI ȘI NOUĂ TOATE...

Pe la începutul veacului al XVI-lea, după vreo 500 de ani de luptă, abacul, preistoricul instrument de calcul, a căzut învins de pana de gîscă transformată în condei, care își asuma singură puterea de a duce la capăt, numai cu ajutorul hîrtiei, orice fel de calcule. Când, însă, mulțimea socotelilor a început să crească, întocmai ca un șuvoi dezlănțuit, zveltul condei se descurca din ce în ce mai greu. S-a înțeles atunci că puterea condeiului nu era nici în agilitatea și nici în eleganța lui, că ea depindea de atenția și de memoria celui ce-l mînuia, iar acesta obosea acum mai repede decît atunci cînd folosea abacul, fiindcă prin natura lui un instrument se descurcă și



singur. De aceea, chiar de la sfârșitul secolului al XVI-lea instrumentul de calcul a căpătat din nou partizani și au început investigațiile pentru găsirea unui nou abac, adaptat cerințelor moderne! Un asemenea instrument a fost imaginat de John Neper, mai înainte de a fi găsit logaritmi și acesta

a devenit repede popular, sub numele de *bastonașele lui Neper*. Cartea în care se descrie instrumentul și modul lui de folosire s-a tipărit abia în 1617 la Edimburg, avînd ca titlu: *Rabdologia sau calculul cu ajutorul bastonașelor*. Neper a dat acest nume noului său instrument de calcul fiindcă *rabdos* înseamnă în limba greacă *băț* sau *baston*, *vergea*, exact așa cum era construită unealta ce venea să elibereze memoria și atenția prea înrobite de condei. Pe fețele laterale ale unor bastonașe în formă de prismă, cu baza un patrat, erau gravate produsele de la 1 la 9 ale fiecăruia dintre numerele de la 1 la 9, o față corespunzînd unei singure coloane. Așadar, bastonașele nu erau altceva decît o tablă a înmulțirii, însă aceasta era desprinsă pe coloane, în așa fel ca prin alăturarea unora dintre ele să se formeze un număr anume, înmulțitorul. De pildă, dacă ar fi fost să se calculeze 4376×587 , fericitul calculator, ce se credea în al noălea cer fiindcă avea alături bastonașele, proceda astfel: întîi alegea dintre ele pe acelea pe care erau înscrise, sus, numerele 7, 8, 5, care, alăturate, formau înmulțitorul 587, și luînd o foaie de hîrtie scria produsele ce le citea pe fețele respective în dreptul numerelor 6, 7, 3 și 4, fiecare deplasat cu cîte un loc înspre stînga după care

trăgea linia și făcea sumele respective, așa cum urmează:

<u>cu 7</u>	<u>4376 × 587</u> <u>cu 8</u>
7.6 = 42	8.6 = 48
7.7 = 49	8.7 = 56
7.3 = 21	8.3 = 24
7.4 = 28	8.4 = 32
4376.7 = 30632	4376.8 = 35008

<u>cu 5</u>
5.6 = 30
5.7 = 35
5.3 = 15
5.4 = 20
4376.5 = 21880

Aceste sume parțiale trebuiau adunate, adică scrise unele sub altele, ținând seama de deplasarea lor spre stînga, cu cîte un loc:

4376	
30632	7
35008	8
21880	5
2 568 712	

Proba cu 9

$$4+3+7+6 = 20$$

$$5+8+7 = 20$$

$$2+0=2$$

$$2+0=2$$

$$\underline{2 \times 2 = 4}$$

$$2+5+6+8+7+1+2=31 \quad \underline{3+1=4}$$

Un calculator mai iscusit putea aduna dintr-o dată, direct chiar de pe coloana respectivă, sumele parțiale scriindu-le dintr-o dată, așa că operația era mult simplificată. După cum se poate constata, bastonașele lui Neper nu-i cereau calculatorului să țină minte pe de rost tabla înmulțirii; iar operațiile, atât de înmulțire cât și de împărțire, dădeau rezultate exacte. Aceste avantaje au contribuit la o largă răspîndire a lor. După apariția logaritmilor și pentru calcule care puteau furniza numai un rezultat aproximativ, s-au inventat și instrumente, care, asemenea celui inventat de Neper, să aibă înscrise tabelele de logaritmi în locul acelor de înmulțire. Astfel E. Gunter (1581—1626) a construit prima *scară logaritmică*, reprezentînd pe o riglă segmente de lungime proporțională cu logaritmi zecimali ai numerelor naturale, toate segmentele fiind măsurate de la aceeași origine, (notată cu 1, deoarece logaritmul lui 1 este zero). Extremitățile segmentelor corespunzătoare lui log. 2, log. 3...log. 9 erau notate cu numerele 2, 3,...9, iar segmentele



erau împărțite fiecare în zece părți egale. Pornind de la faptul că logaritmi transformă înmulțirea într-o adunare, ca să facă înmulțirea a două numere era de ajuns să se măsoare cu un compas segmentele ce reprezentau prin apreciere cu ochiul liber numerele de înmulțit și, după ce aceste segmente au fost așezate cap la cap, se lua *mărimea sumă*

în compas și se așeza din nou pe riglă, un picior al compasului fiind pus în originea segmentelor. Locul pe care îl arăta al doilea picior al compasului era chiar rezultatul înmulțirii. În cazul unei împărțiri, segmentul mai mic era scăzut din cel mai mare și apoi se citea cîtul în același mod. Și acest instrument s-a bucurat de multă popularitate, fiindcă el era mai simplu de mînuit decît o tablă de logaritmi. Peste patru ani, E. Wingate (1593 — 1656) a adus o modificare esențială scării lui Gunter și a construit, în Franța, instrumentul care nu mai cerea ajutorul compasului. În noua formă, instrumentul se prezintă ca o suprapunere de două rigle identice și identic gradate, care pot aluneca una de-a lungul celeilalte. În acest mod segmentele (unul pe o riglă și celălalt pe a doua riglă), de adunat sau de scăzut, se pot așeza direct unul în continuarea celuilalt, astfel că, la extremitatea celui de al doilea segment de pe rigla a doua, se poate citi, pe scara de pe prima riglă, produsul sau cîtul. A fost prima *riglă de calcul* care se dovedea cu mult mai avantajoasă și mai precisă decît scara lui Gunter. Dar nici aceasta nu-și atinsese încă perfecțiunea. Alte îmbunătățiri au fost adăugate treptat pînă la jumătatea secolului trecut, cînd ea a căpătat forma actuală și numele

de *riglă logaritmică*. Ea este formată din trei scări alăturate și identic gradate, în care numai rigla de la mijloc este alunecătoare, pe când celelalte două extreme sînt fixe. În plus, rigla are un cursor transparent, pe care este gravată o linie de reper ce permite să se stabilească cu precizie extremitățile segmentelor de calculat. Mică și ușor de purtat, o riglă logaritmică modernă nu-i numai o tablă de logaritmi, ci și una de sinusuri, de patrate și rădăcini patrate, de cuburi și rădăcini cubice sau încă de alte tabele speciale. De aceea ea este azi instrumentul ideal și indispensabil pentru orice conducător de lucrări de pe un șantier de construcții, unde gradul de aproximație al calculelor nu depășește pe acela care-l poate da rigla. Putea omul să se considere mulțumit de cele ce a realizat în legătură cu posibilitatea de a ușura munca celui ce calculează? Nu. Mai întîi pentru că aceste instrumente, oricît de perfecționate ar fi fost, nu puteau înlocui abacul! Ele nu puteau face adunări. Dar mai era ceva, omul nu se putea mulțumi cu un instrument lipsit de inițiativă, docil în mîinile lui, îi trebuia altceva, ceva care să execute automat dispozițiile ce avea să le dea. Nimeni nu a spus-o așa de limpede ca Tudor Arghezi:

*Cel ce gîndește singur și scormone lumina
A dat o viață nouă și-un om de fier, mașina.*

Da. Aceste instrumente erau numai începutul care-l încredințau pe om că era în stare să afle calea pe care o căuta.

PE DEDESUBT URZITĂ INTRE TĂCERI ȘI SEMNE

Tatăl lui Blaise Pascal (1623—1662) era administrator financiar și de aceea stătea treaz noapte de noapte, ca să adune coloanele nesfîrșite de cifre și să încheie astfel situațiile de plăți și de impozite ce i se cereau. Nu dormea nici fiul, pe atunci un tînăr de 18 ani, care ținea foarte mult să-i ajute tatălui său. Dar Blaise Pascal pînă la această vîrstă făcuse multe descoperiri ingenioase, atît din domeniul matematicilor pure, cît și al tehnicii. De pildă, inventase *roaba*, numai pentru că vedea grădinarii care se munceau cîrînd gunoiul sau pămîntul cu sacul în spinare. Desigur că nu-l putea lăsa indiferent

nici munca aceasta istovitoare și fără de sfârșit a părintelui său și, cu avîntul și imaginația ce-l caracterizau, și-a pus în minte să inventeze o mașină care să facă ea socotelile pe care el sau tatăl lui avea numai să i le dicteze ! Nimeni pînă atunci nu se gîndise la o asemenea ispravă, fiindcă aici era vorba, nici mai mult nici mai puțin, decît să-ți imaginezi că o mașină neînsuflețită ar putea gîndi în locul omului ! Pascal a meditat îndelung la acest lucru, de mic dovedise că știe să gîndească adînc și, așa cum spune Arghezi „între tăceri și semne“, a urzit prima mașină de calcul din lume. După multe încercări, a reușit să taie și să șlefuiască îndeajuns de bine cei 6 cilindri, așezați și legați între ei unul lîngă altul, fiecare cilindru avînd suprafața împărțită în 10 benzi egale, numerotate de la 0 la 9, astfel că, prin învîrtirea unei manivele, acești cilindri să poată înscris, prin poziția lor, orice număr compus din 6 cifre. La fiecare rotație a unui cilindru cu un unghi egal cu $\frac{1}{10}$ din lungimea cercului de bază, adică de 36° se schimbau cifrele care apăreau într-un șir de ferestruici puse în rînd, dînd astfel posibilitatea să se vadă numărul înscris în mașină. Un dispozitiv făcea ca, fiecare zece atins de un cilindru să

treacă automat pe cilindrul din stînga lui o unitate de ordin superior. În felul acesta, printr-o simplă învîrtire de manivelă, după ce se înscrisa un număr, se continua înscriind al doilea, care se aduna, în mod automat, la primul, făcînd ca în ferestruici să apară rezultatul. De pildă, să presupunem că ar fi fost de adunat 4578 cu 79532. Atunci se începea rotind primul cilindru din dreapta cu $\frac{8}{10}$ din turul complet, al doilea cu $\frac{7}{10}$, al treilea cu $\frac{5}{10}$ și al patrulea cu $\frac{4}{10}$. În ferestruicile mașinii apărea astfel numărul 4578. Acum se repeta procedeul și rotind primul cilindru cu încă $\frac{2}{10}$ iar în ferestruică apărea cifra 0 $(8+2)=10$ și, continuînd operația, în ferestruica a doua se vedea cifra 1 $(7+3+1)=11$ și așa mai departe, pînă la urmă apărea rezultatul 84110, efectuat fără ca Pascal sau tatăl lui să fi avut altceva de făcut decît să învîrtească manivelele, cu atîta cît arătau cifrele numerelor de adunat. Aceasta s-a întîmplat în anul 1642, an hotărîtor în istoria invențiilor omenești, căci atunci s-a făcut primul pas către creierul electronic. Vestea acestei mașini a îndemnat și pe alții să repete încercarea. În 1666, S. Morland a construit la Londra o altă mașină de făcut



adunări. În 1709 se spune că s-a mai construit o mașină de adunat ce funcționa prin contra greutatea, dar când autorul a comparat-o cu aceea a lui Pascal, a distrus-o el însuși, considerînd-o mult inferioară. În 1725, Academia de științe din Paris accepta mașina de adunat

a lui Lepine, care aducea unele modificări simplificatoare mașinii lui Pascal. Dar tipul mașinilor de adunat, care să se producă în serie, a fost realizat abia după 200 de ani, adică în 1851. Atunci a fost prezentată la expoziția din Londra de către V. Schilt prima mașină de adunat în care cifrele se înscriau prin apăsarea pe clape. Se realiza astfel nu numai o mai mare siguranță în manevrarea cifrelor, dar și o creștere a vitezei de calcul.

Alături de numele marelui matematician Blaise Pascal, în istoria mașinilor de calculat se mai înscrie și numele unui alt matematician și filozof de aceeași mărime, anume Gottfried W. Leibniz (1646–1716). Pe Leibniz l-a preocupat, din 1671, construirea unei mașini de adunat și de înmulțit. Ca să facă și înmulțirea, mașina trebuia să poată aduna repede, de mai multe ori în șir, același număr



Fiindcă pe vremea lui Pascal, Regina Christina a Suediei era considerată ca protectoarea savanților, Blaise Pascal i-a trimis un exemplar al mașinii lui de calculat, drept omagiu. În scrisoarea care a însoțit darul, Pascal scria: „Maiestatea voastră nu poate să nu înțeleagă câtă osteneală și cât timp cer producțiile noi, mai ales dacă inventatorul vrea să le aducă el însuși la ultima perfecțiune”. Se pare însă că Regina nu a înțeles însemnătatea acestei descoperiri.

compus din mai multe cifre. Leibniz a realizat aceasta, inventînd *antrenorul*, un cilindru suplimentar, care permitea să se repete, de atîtea ori cît arăta o cifră a înmulțitorului, întregul număr înscris în mașină. Leibniz a construit două tipuri diferite de mașini care adunau și totodată înmulțeau; una a construit-o în 1694, iar alta în 1704. Ultima însă a dispărut. În 1897 W. Jordan a publicat un manuscris al lui Leibniz, compus probabil prin 1685, intitulat *Mașini aritmetice de calcul cu care se pot face nu numai adunări și scăderi, dar și înmulțiri și împărțiri*. În acest manuscris se găsesc descrise multe dintre dispozitivele ce sînt folosite azi în mașinile moderne de calcul. Tot cam în același timp cu Leibniz, la Londra S. Morland a construit și el o mașină de făcut înmulțiri, însă prima mașină de adunat și înmulțit folosită de observatoarele astronomice și care a intrat în viața economică se datorește lui Thomas de Colmar și datează din 1820. De atunci ea a mai suferit diverse perfecționări și a rămas una dintre cele mai răspîndite. Un alt mare matematician pe care l-au preocupat mașinile de calculat a fost P.L. Cebîșiov (1821 — 1894). El a construit o mașină de adunat și înmulțit cu mișcare continuă, înlăturînd astfel pînă și singura atenție ce se cerea operatorului, aceea

de a număra învîrtiturile ce trebuia să le facă, ținînd seama de cifra de la înmulțitor, un clopoțel atrăgînd atenția cînd acesta trebuia să se oprească. Pînă la sfîrșitul secolului al XIX-lea au mai fost aduse și alte perfecționări esențiale, dintre care cea mai importantă a fost aceea că s-au înlocuit operațiile manuale, de învîrtire a manivelei, prin operații electrice, comandate numai de apăsarea pe un buton. Desigur că această inovație a micșorat mult timpul de executare a operațiilor, ajungîndu-se ca, de la o jumătate de minut, cît era timpul necesar unei mașini Colmar ca să execute o înmulțire dintre două numere de cîte 10 cifre, să se efectueze cîteva zeci de asemenea operații într-o secundă.

În 1920, adică atunci cînd s-au împlinit 100 de ani de la apariția mașinii de calcul construită de Thomas de Colmar, s-a organizat la Paris o expoziție de asemenea mașini. Printre acestea a făcut senzație o mașină electro-mecanică, prezentată de Torres y Quevedo, numită „Automatica”, care atinsese atunci cu adevărat culmea automatizării, fiindcă era de ajuns ca să se apese pe clape numerele ce trebuiau înmulțite sau împărțite, iar mașina făcea singură operațiile și scria, tot ea singură, rezultatul. Toate mașinile de calcul despre care am vorbit pînă acum se



pot grupa într-o singură categorie, aceea a *aritmometrelor* și, într-un sens mai larg, pot fi considerate ca expresia modernă a străvechiului abac, deoarece ele nu fac decât operații aritmetice cu numerele care sînt introduse în mașină.

Pe lângă aceste mașini aritmetice, în prima jumătate a secolului al XX-lea au fost inventate și altfel de mașini, numite *mașini analogice*.



În 1896 tot savantul spaniol Torres y Quevedo a construit și Jucătorul de șah automat, în care, la fiecare mișcare a unui jucător de șah, mașina odată pusă la priză răspunde îndată cu mișcarea cea mai corectă.

Ca să înțelegem principiul care stă la baza construcției lor să ne întoarcem la rigla logaritmică de calcul și să vedem în ce mod se obțineau, cu ajutorul ei, rezultatele operațiilor ce trebuiau executate cu două numere. De pildă, dacă trebuia făcută o înmulțire pe rigla de calcul, corespundea la fiecare număr dat un anumit segment așa că *înmulțirea celor două numere date se traducea prin adunarea a două segmente* de dreaptă, anume segmentele corespunzătoare celor două numere. Așadar, la o riglă de calcul numerele cu care trebuia făcută o operație aritmetică *se înlocuiau* prin niște segmente de dreaptă cu care se făcea o altă operație, însă această nouă operație dintre segmente era *asemănătoare* sau *analoagă*, adică era *corespunzătoare* operației aritmetice ce trebuia executată și ducea, în alt mod, la același rezultat. Asemenea analogii se pot stabili pe multe căi între o problemă matematică, teoretică sau

practică, și anumite mărimi sau chiar fenomene fizice care să se comporte într-un mod *analog* cu operațiile de care ascultă datele din problema cercetată. De exemplu, asemenea mărimi pot fi nu numai segmentele, dar și unghiurile de rotație sau intensitățile de curent electric sau variațiile de potențial etc. Găsirea aceluși fenomen fizic care poate fi pus în corespondență cu operația matematică ce trebuie efectuată duce la rezolvarea problemei pe o altă cale decât aceea a calculului executat prin procedee matematice. Acesta este principiul pe care se bazează mașinile de calcul analogice. Fiind însă legate de traducerea numerică a unor fenomene fizice, aceste mașini analogice nu pot da decât un rezultat aproximativ (ca și rigla de calcul), însă ele sînt de un real folos atunci cînd eroarea rezultatului se încadrează în limitele de erori admise de problemă. Cu mașinile analogice se rezolvă diferite tipuri de ecuații sau se fac calcule din domeniul matematicilor superioare, soluțiile pe care le dau ele fiind mai repede și mai ușor de găsit decât dacă s-ar folosi o mașină de calcul aritmetică.

Cu aceste noi invenții, mașinile de calcul au atins oare apogeul? Dacă la începutul secolului XX, nimeni nu ar fi putut bănu

că omul va fi în stare să le construiască, patru decenii mai târziu, când le-a construit, putea el să oprească aici cerința și dorința de progres? Desigur că nu, cel ce visa zborul extraterestru trebuia să-și făurească și calculatoarele necesare! Cele de pînă acum au fost numai o etapă de pregătire pentru calculatoarele inventate după anul 1940!

SECUNDA-NTRECE VEACUL

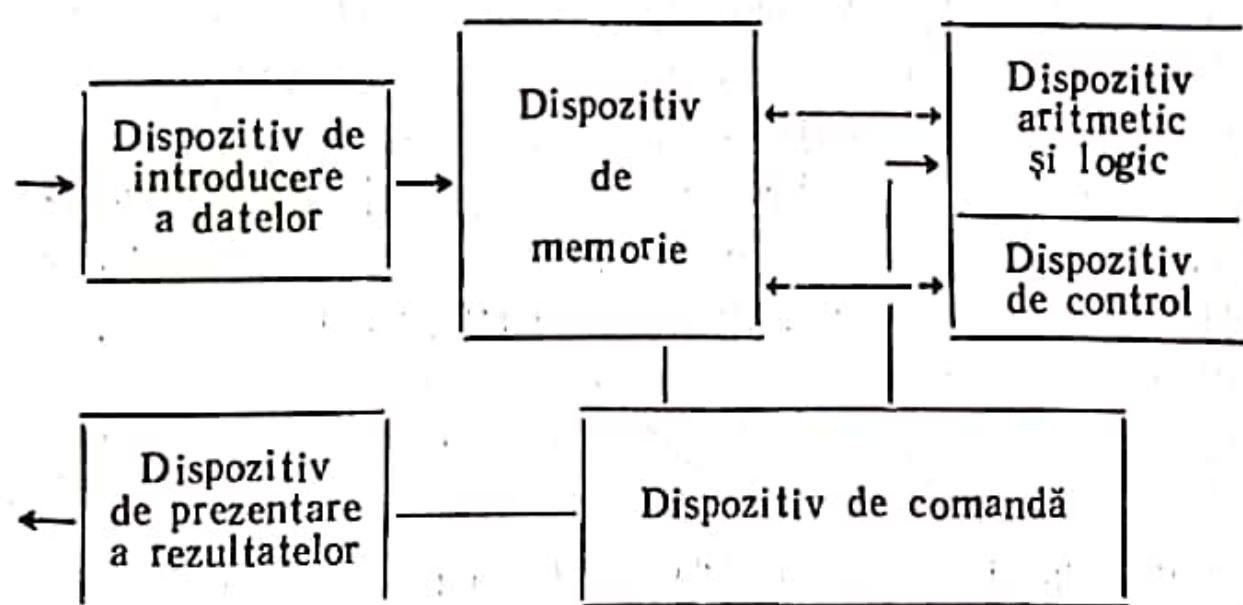
Secunda-ntrece veacul nu este numai o fantastică imagine poetică, dăruită nouă de Tudor Arghezi, ci un fapt, din domeniul calculatoarelor electronice cu care am început să ne obișnuim, de vreo douăzeci de ani încoace. Primul calculator electronic, numit ENIAC, construit în Philadelphia în anul 1946, făcea o adunare de oricîte numere în mai puțin de a mia parte dintr-o secundă și executa într-o secundă nu mai puțin decît 32 000 de operații aritmetice. Calculatoarele de azi au ajuns să efectueze 1 000 000 de



operații aritmetice într-o secundă ! Fără de această viteză nu s-ar fi putut realiza zborurile pline de succes ale navelor spațiale spre Lună și nici nu am fi putut avea vreuna dintre impresionantele știri despre planeta gigantă Jupiter sau despre pitica planetă Mercur. Cum au putut ajunge calculatoarele electronice la această viteză de lucru, imposibil de închipuit, nu o putem explica decât rămânând pe aceleași meleaguri cu caii năzdrăvani, care ajung într-o clipită peste nouă țări și nouă mări. Calculatoarele electronice se deosebesc de aritmometre prin aceea că ele nu fac numai anumite operații, oricât de complicate ar fi acelea, ci rezolvă în mod automat și de la început pînă la sfîrșit o anumită problemă, stabilind cu repeziciunea

gîndului soluția cea mai bună sau cea mai convenabilă dintre toate soluțiile pe care le-ar putea prezenta acea problemă. Ca să poată decide acest lucru, calculatorul electronic trebuie să aibă la îndemîină toate informațiile posibile asupra problemei și să cunoască cum poate ajunge la aceste informații, în ce ordine și cum trebuie să le folosească. Apoi, atunci cînd stabilește rezultatele, să știe cum să le compare între ele, și în ce fel să hotărască pe cel mai bun. Se vede de aici că un calculator electronic trebuie să se compună din mai multe părți cu totul deosebite, care să fie legate între ele prin dispozitive automate. Printre aceste părți, cu funcții diferite, una cuprinde toate informațiile de care are nevoie mașina, fiind formată dintr-un dispozitiv care să le înregistreze; ea poartă numele de *memoria mașinii*. Datele se introduc printr-un *dispozitiv de introducere a datelor*. Un alt dispozitiv trebuie să efectueze toate operațiile aritmetice necesare, de aceea se și numește *dispozitiv aritmetic*. Dar cum știe să efectueze operațiile, în ce ordine, de unde își ia datele? Acestea trebuie să-i fie comandate, desigur că tot automat, de un alt dispozitiv: *dispozitivul de comandă*. El îi arată și ce trebuie să facă cu socotelile odată încheiate, unde

să le ducă, cum să le folosească mai departe și, totodată, îi comandă să treacă operațiile executate *la control* (*dispozitivul de control*), ca nu cumva să se fi strecurat vreo operație greșită obținută prin cine știe ce defect al mașinii. În fine, atunci când apar mai multe rezultate, tot dispozitivul de comandă dispune de acela care trebuie ales după anumite criterii logice, dinainte prevăzute. Când problema este rezolvată, un *dispozitiv de prezentare a rezultatelor* arată soluția după care mașina își încetează activitatea. În mod schematic planul unui calculator poate fi desenat astfel:



Dacă ne-am mulțumi cu această schemă, am ști mai puțin despre calculatorul electronic

decît ştim despre calul năzdrăvan din poveste care porneşte la drum. El străbate într-o clipă cele nouă ţări şi nouă mări fiindcă Făt-Frumos i-a şoptit în ureche încotro trebuie să o apuce şi ce treabă are de făcut. Exact acelaşi lucru îl aşteaptă şi calculatorul electronic ca să se poată apuca de lucru! Oricîte date i-am pune în memorie, acestea nu-i folosesc la nimic dacă matematicianul care vrea să rezolve problema nu a gîndit-o el mai întîi, nu a rezolvat-o el în minte şi nu a tradus-o, într-o formă aritmetică finită ce se numeşte *program*, pe care să-l introducă în maşină, ca vorbele şoptite în urechea calului. În articolul publicat în revista Contemporanul, despre care am mai amintit, Acad. prof. Gr. C. Moisil scria: „Calculatorul nu rezolvă problemele, cum se spune. Problemele le rezolvă omul, dar în rezolvarea lor omul se serveşte nu numai de toc şi hîrtie, ci şi de calculator“. *Programul* înseamnă



Intr-un preafrumos articol intitulat „Computere şi calculatoare“ (p. 138) din volumul *Indoieli şi certitudini*, Acad. prof. Gr. C. Moisil ataca, plin de verva care-i era caracteristică, pe acei care folosesc numirile de „Computer“ sau „Ordinator“ pentru „calculatorul electronic“, încheind articolul cu acest citat din Proust: „Snobismul are treptele lui!“

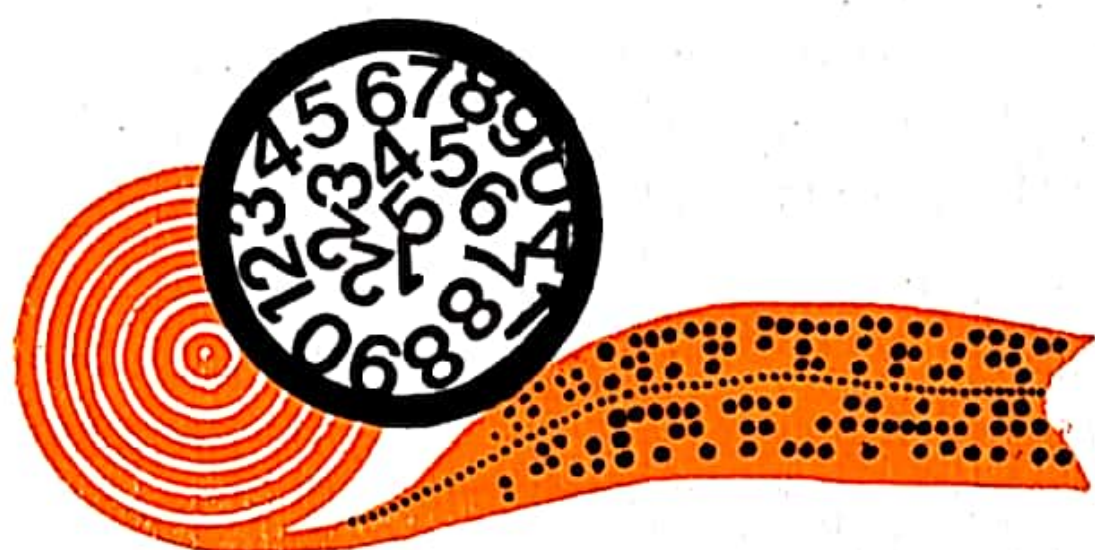
tocmai *comenzile*, care arată în ce mod și în ce ordine trebuie prelucrate datele ce au fost introduse în mașină odată cu acest program. Datele, ca și dispozițiile, sînt transmise mașinii printr-un *cod*, și, de cele mai multe ori, în locul sistemului zecimal, numerele se scriu în sistemul binar, adică în sistemul cu baza 2. Acest mod de scriere a numerelor nu-i întîmplător, ci a fost sugerat de însăși structura mașinilor care folosesc relee electrice, compuse din circuite ce lucrează prin deschiderea și închiderea unor contacte, adică întreruperea sau trecerea curentului electric. Un contact deschis înseamnă că nu trece curent, așadar faptul se poate traduce prin cifra zero, din contra, contactul închis, curentul trece corespunzînd astfel cifrei 1. Un număr oarecare, scris în sistemul zecimal nu ar putea fi înregistrat prin asemenea impulsuri de curent electric, dar el s-ar înregistra perfect dacă ar fi transformat mai întîi în sistemul binar, sistem în care se numără numai pînă la doi. Iată dar că mașina electronică, cea mai înaltă, cea mai însemnată descoperire din secolul XX, îi cere omului să se întoarcă înspre cea mai umilă, înspre cea mai veche descoperire făcută de el cu mii de mii de ani în urmă, înspre sistemul de numerație binar ca să-l scoată din uitare și

să-l pună iar la loc de cinste. Să ne oprim dar ca să vedem mai îndeaproape care este mecanismul unui sistem de numerație și cum se poate trece de la sistemul zecimal nu numai la sistemul binar, ci la oricare alt sistem de numerație cu baza un număr deosebit de zece, să-i spunem în general acestui număr b , unde b poate fi egal cu 2, 5, 7, 16 etc. Când $b = 10$ atunci un număr N se scrie sub forma: $N = N_p \cdot 10^p + N_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \dots + N_1 \cdot 10 + N_0$. De exemplu dacă $N = 20\,346$, atunci $20\,346 = 2 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 6$. Comparînd cu formula generală, de mai sus, înseamnă că $p = 4$ și deci:

$$N_4 = 2; N_3 = 0; \dots N_1 = 4 \text{ și } N_0 = 6.$$

Dacă în baza zece se folosesc 10 cifre: 0, 1, 2, ..., 9, în baza b se folosesc b cifre, iar numărul se scrie ca o sumă de puteri succesive ale bazei b . Dacă $b = 2$ atunci se folosesc două cifre 0 și 1 și numărul se descompune în puterile succesive ale lui 2. Astfel, numărul 15, de exemplu, descompus după puterile lui 2, se scrie ca suma: $15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$. Așadar în baza 2, numărul 15 se scrie cu 4 cifre, toate 1111. De ce? Fiindcă $15 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1$, și numărul se notează prin alăturarea cifrelor ce înmulțesc puterile succesive ale lui 2. După cum vedem, în baza

2 a fost ușor de descompus un număr scris în sistemul zecimal, fiindcă puterile lui 2 s-au putut stabili imediat. Dar dacă ar fi să transformăm un număr scris în sistemul zecimal în sistemul cu baza 7? De data aceasta, ca



să-l descompunem după puterile lui 7, vom cere ajutorul unui procedeu folosit cu 2200 de ani în urmă de către Euclid, ba poate chiar și mai înainte; el se află în *Elemente* și de aceea a fost numit *algoritmul lui Euclid*. După cum se știe, algoritmul lui Euclid permite să se obțină cîtul dintre două numere întregi, exprimat prin puterile succesive ale împărțitorului și al ultimului rest, cînd împărțirile succesive nu se termină exact. Ca

să găsim deci puterile succesive ale lui 7 baza noului sistem de numerație, se aplică această metodă, ea fiind cea mai rapidă. Dacă de exemplu vrem să scriem numărul 3597 în sistemul cu baza $b=7$, înseamnă că numărul 3597 trebuie pus sub forma $3597 = N_p \cdot 7^p + \dots + N_{p-1} \cdot 7^{p-1} + \dots + N_1 \cdot 7 + N_0$. Cum se află $N_p, \dots, N_0$? E clar că numărul 3597 trebuie împărțit în mod succesiv cu 7: Iată cum se pot scrie aceste împărțiri succesive, într-un singur rînd:

3597	7					
=9	513	7				
27	=23	73	7			(1)
=6	=2	=3	10	7		
			=3	1	7	
				1	0	

$$\begin{aligned}
 3597 &= 7 \cdot 513 + 6 \\
 513 &= 7 \cdot 73 + 2 \\
 73 &= 7 \cdot 10 + 3 \\
 10 &= 7 \cdot 1 + 3 \\
 1 &= 7 \cdot 0 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &6 \cdot 7^0 \\
 &+ 2 \cdot 7^1 \\
 &+ 3 \cdot 7^2 \\
 &+ 3 \cdot 7^3 \\
 &+ 1 \cdot 7^4
 \end{aligned}$$

De aici au rezultat următorul șir (1) de egalități pe care le vom aduna, după ce le-am înmulțit pe fiecare dintre ele, respectiv cu puterile crescînde ale lui 7: (ca să se poată reduce termenii asemenea dintr-o parte și alta a egalităților): Rezultă așadar:



$3597 = 1 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 6$ sau
 în baza 7, numărul dat se scrie:
 $(3597)_7 = 13326.$

Să vedem încă și cum s-ar scrie acest număr într-un sistem de numerație cu baza 16? În acest caz, numărul cifrelor necesare ca să se exprime acest număr este 16 și alături de cele 10 cunoscute se adaugă încă primele 6 litere mari ale alfabetului. Sistemul de numerație cu baza 16 fiind folosit în unele calculatoare merită să-l considerăm aici. Să scriem deci cele 16 cifre din numerația hexagesimală:

1, 2, 3, ..., 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10.

După cum se observă ultimul număr care are valoare de 16 se notează cu 10, dar acest 10 nu este același ca în sistemul zecimal, el corespunde numărului 16 din sistemul zecimal. Ca să-l exprimăm pe 3597, aplicăm iar algoritmul lui Euclid, împărțitorul fiind acum 16:

3597	16	
<u>=39</u>	<u>224</u>	<u>16</u>
<u>=77</u>	<u>=64</u>	<u>14</u>
13	0	14
		<u>16</u>
		0

de unde rezultă egalitățile (1):

(1)	$3597 = 16 \times 224 + 13$	$\begin{array}{r} 16 \\ 16^2 \end{array}$
	$224 = 16 \times 14 + 0$	
	$14 = 16 \times 0 + 14$	

$$\text{sau prin adunare: } 3597 = 14 \times 16^2 + \\ + 0 \times 16 + 13$$

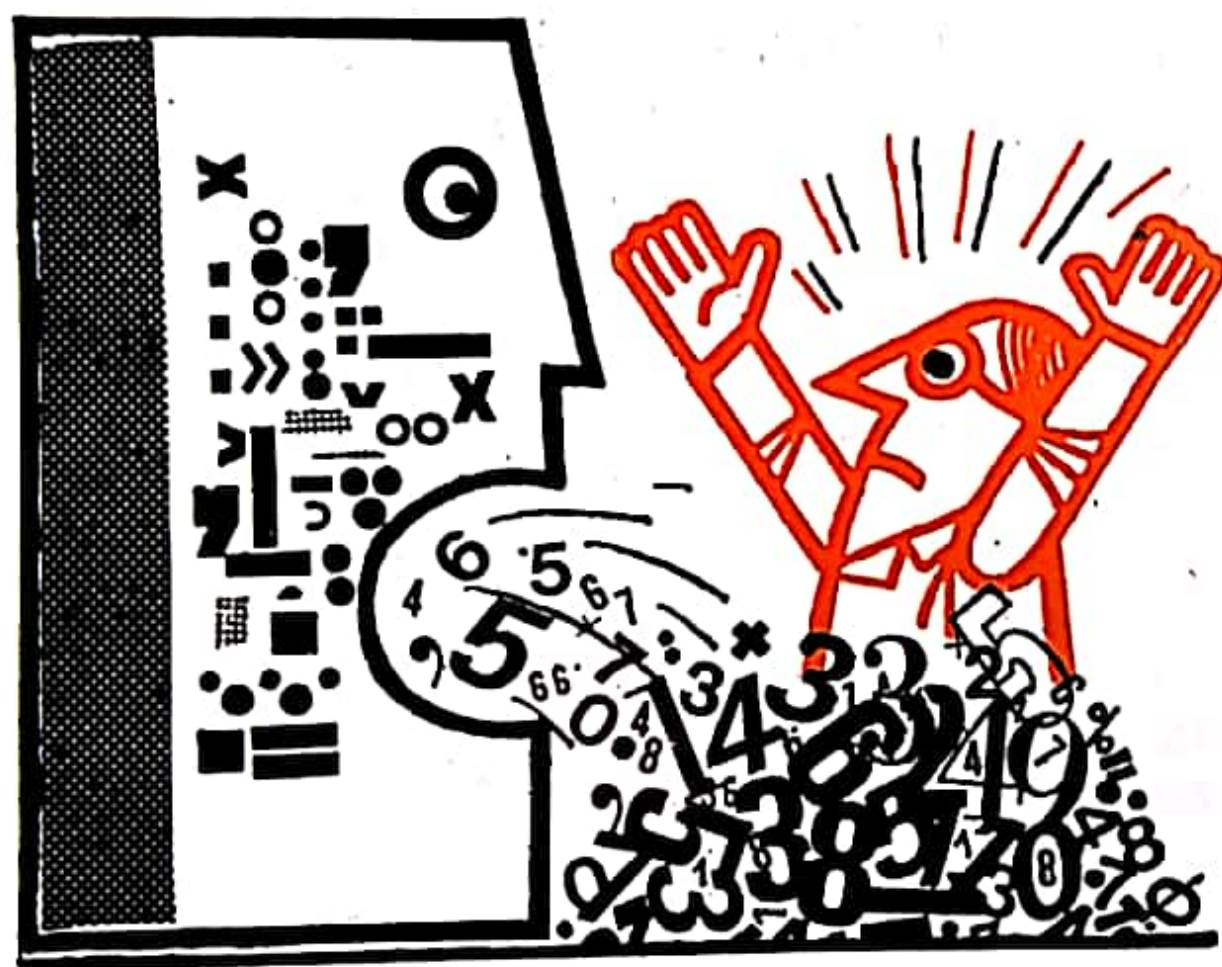
Acum, traducînd numerele din sistemul zecimal în cel sexagesimal, avem: $14 = E$, $0 = 0$, $13 = D$: Aşadar, numărul 3597 se exprimă astfel:

$$(3597)_{16} = EOD.$$

Maşinile electronice de calcul au fost numite la început şi *calculatoare cu program*, tocmai fiindcă se deosebeau de celelalte maşini de calcul prin automatizarea completă a operaţiilor, realizată prin introducerea în maşină a programului de lucru. Calculatoarele electronice au fost construite în jurul anului 1940. În cele trei decenii ce au trecut de atunci, ele au suferit modificări esenţiale. Dacă ar fi fost vorba de altfel de maşini s-ar fi considerat şi înregistrat existenţa unor *tipuri noi*. Dar se pare că cei ce lucrează cu calculatoarele se simt atîta de înfrăţiţi cu ele, încît ei consideră că au apărut nu *tipuri*, ci *generaţii* noi de calculatoare. Folosind acest cuvînt, cu alint de vieţuitoare, iată care este arborele lor genealogic:

Calculatoarele din prima generaţie (1940 – 1950) erau compuse din tuburi electronice.

De exemplu ENIAC avea 18 000 de lămpi electronice. De aici le-a venit și numirea de mașini electronice de calcul. Ele erau foarte



voluminoase și consumau multă energie electrică. Toate aveau același limbaj de programare numit ALGOL (prescurtarea și contopirea cuvintelor: *algorithmic language*, adică

limbaj algoritmic), sistemul zecimal fiind transformat în cel binar.

Calculatoarele din a doua generație (1955 — 1960) au căpătat un volum mult mai redus, deoarece lămpile electronice au fost înlocuite cu tranzistori. Totodată pe lângă limbajul ALGOL, din 1958 s-a mai introdus un limbaj nou, numit FORTRAN (o nouă prescurtare și alipire a cuvintelor *Formula translation*, adică traducerea formulelor. În acest nou mijloc de programare, operațiile sînt exprimate prin formule ce sînt traduse în limbajul calculatorului.

A treia generație de calculatoare (1964 — 1968) au un volum și mai redus și o viteză de calcul mult mai mare decît calculatoarele din generațiile precedente. Ele funcționează cu

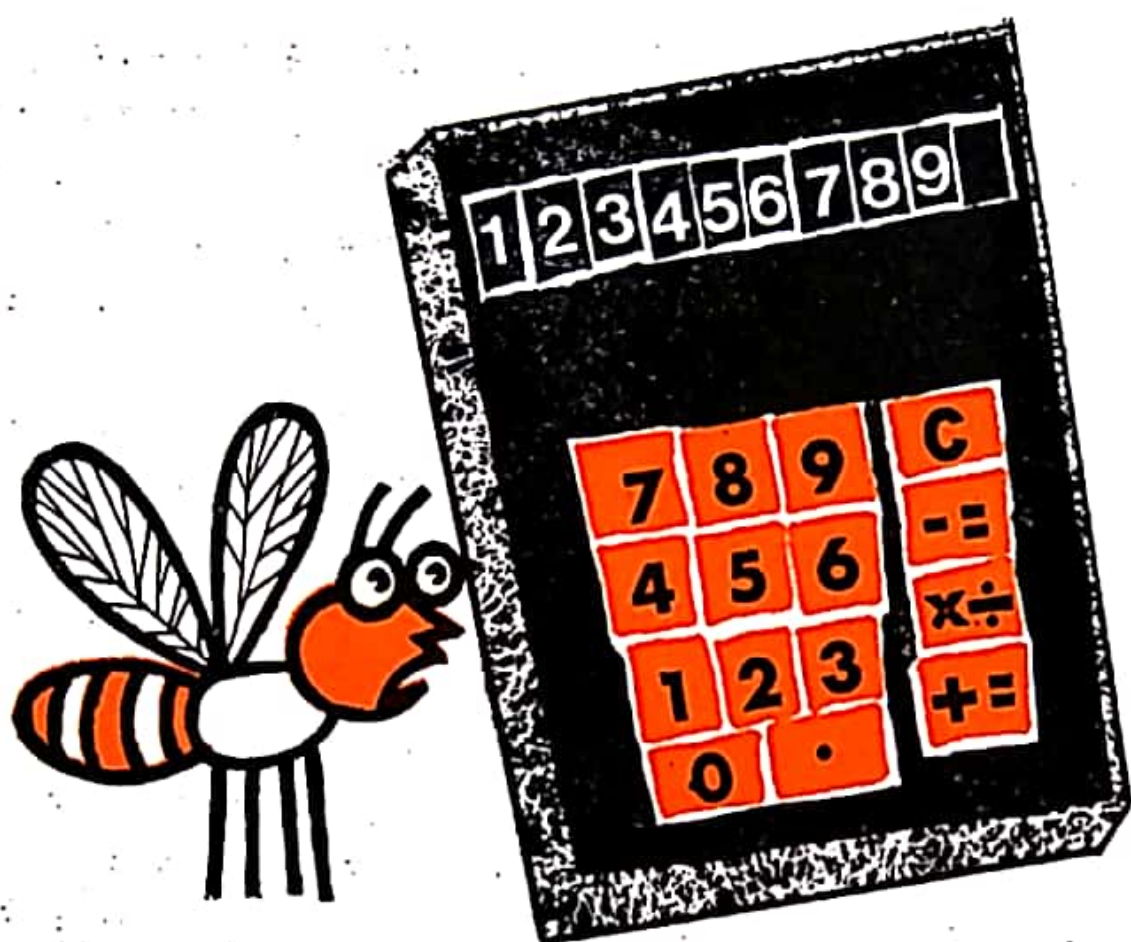


Dacă în 1777 în țara noastră se tipărea o umilă cărticică de aritmetică în românește, azi, la mai puțin de 200 de ani, tot în țara noastră se construiesc mașini de calculat aritmetice și analogice nu numai pentru nevoile noastre, ci și pentru ale altor țări. Aceste mașini de calcul se construiesc la Institutul de Fizică Atomică și la Institutul de Energetică al Academiei Republicii Socialiste România din București, la Institutul Politehnic din Timișoara, la Institutul de Calcul din Cluj și, peste puțină vreme, se vor construi și în Iași.

circuite imprimate pe semi-conductori. Dacă în 1950 numărul calculatoarelor din lume nu depășea 15, acela al calculatoarelor din ultimele două generații s-a ridicat la zeci de mii. Ele au pătruns în toate domeniile industriei, comerțului, finanțelor, peste tot unde s-a introdus automatizarea, peste tot unde se căutau soluțiile cele mai bune în desfășurarea proceselor de producție.

A patra generație de calculatoare s-a născut în 1972, ele au un mod deosebit de folosire a memoriei și funcționează cu circuite integrate, lasere etc.

Din 1958, la noi în țară se construiesc și calculatoare electronice. Prima generație a fost numită CIFA (Calculatoare ale Institutului de Fizică Atomică din București). Tot din prima generație face parte și calculatorul MECIPT (Mașina Electronică de Calcul a Institutului Politehnic Timișoara). Din generația a doua sînt CIFA 101 și CIFA 102, construite în 1965, precum și DACICC 200 (Dispozitiv Aritmetic de Calcul al Institutului de Calcul din Cluj). În fine, din 1970 fabricăm a treia generație de calculatoare FELIX C 256 iar în prezent se construiesc mașini din generația a IV-a.



Peste 100 000 de echipe de matematicieni lucrează azi ca să stabilească programe pentru cele peste 100 000 de calculatoare existente pe întreaga suprafață a Pământului.

După ce fiecare dintre aceste echipe se străduiește ore, zile sau chiar luni întregi să pună la punct și să introducă în mașina respectivă programul corespunzător problemei ce trebuie rezolvată, calculatorul dă răspunsul uneori în câteva secunde, alteori într-un timp mai îndelungat. Dar de fiecare dată volumul de calcule pe care îl execută mașina în acest

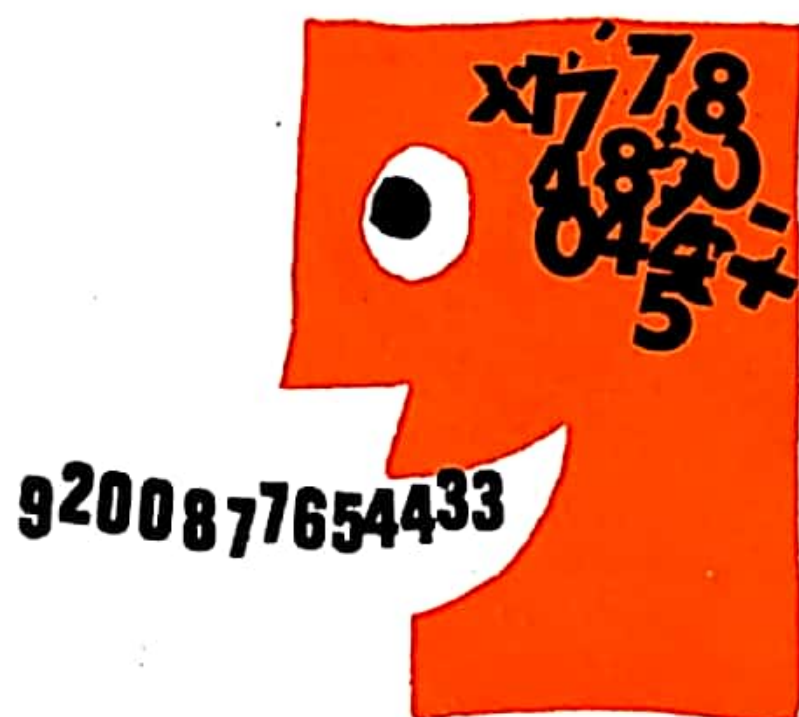
răstimp este imens și imposibil să fie executat de aceleași echipe cu creionul pe hîrtie sau cu vechile mașini de calcul în zeci și chiar în sute de ani de muncă neîntreruptă.

De cele mai multe ori întrebările la care răspunde un calculator electronic sînt importante, legate fie de procesele tehnice, fie de probleme științifice sau de producție.

Uneori, însă, i se strecoară calculatorului și cîteva probleme mai puțin grave, dar nu mai puțin interesante, cîte o problemă-jucărie, menită să bucure sau să sature foamea de cunoaștere. Asemenea probleme sînt acelea care cer calculatorului să scrie o piesă muzicală, să compună o poezie sau să pună în evidență anumite numere interesante, din șirul lor nesfîrșit și monoton. Așa, de pildă, s-a aflat că numărul $2^{11213} - 1$ este primul număr prim care urmează după $2^{127} - 1$, ce fusese calculat încă din anul 1876. Acest nou număr prim, care a putut fi cunoscut numai datorită programării lui într-o mașină electronică de calcul, a fost așteptat aproape 100 de ani de cei ce iubesc numerele prime. L-au așteptat și au tresărit de emoție la apariția lui după cîteva secunde de funcționare a mașinii fiindcă știau că omul fără ajutorul acestei invenții a lui nu l-ar fi putut cunoaște niciodată.

Există oare vreo expresie mai potrivită să caracterizeze această fantastică performanță a omului din cea de-a doua jumătate a secolului nostru decît lapidarul vers arghezian? :

Secunda-ntrece veacul

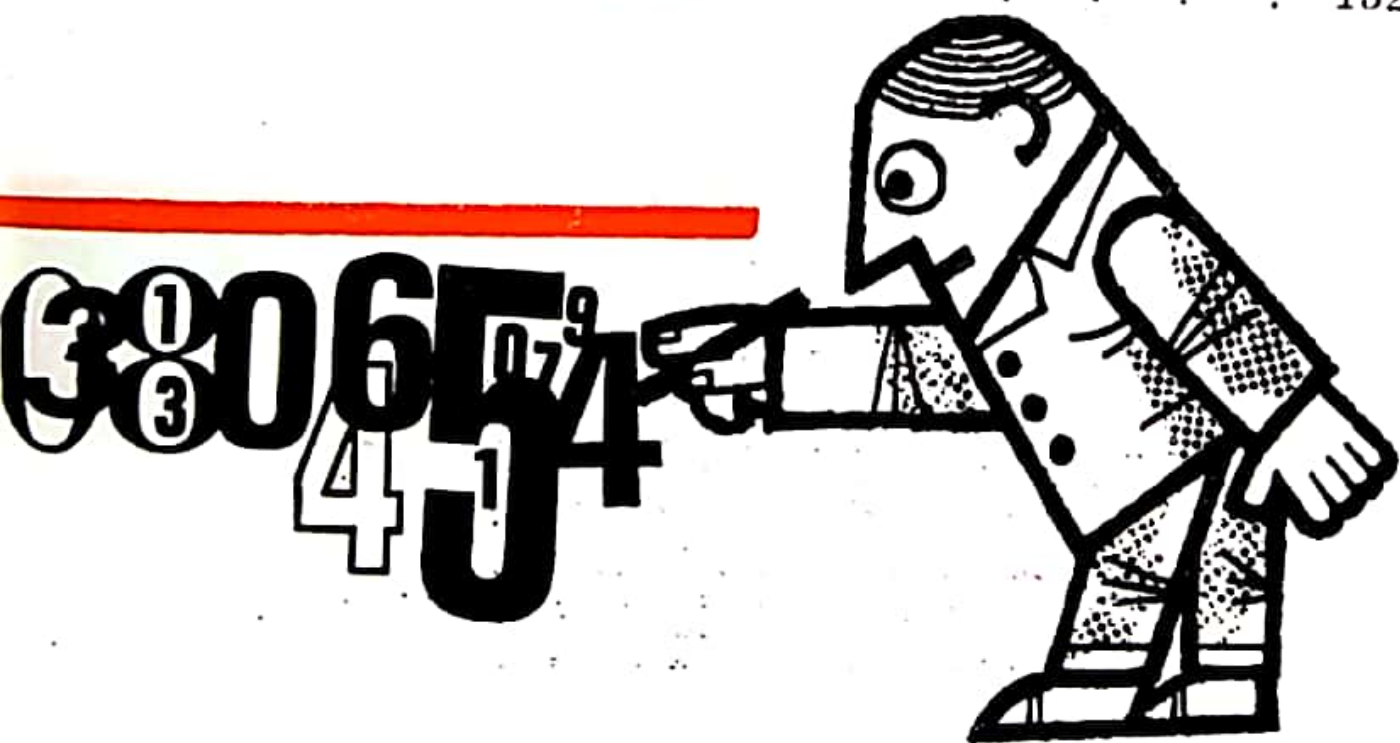


[illegible]

= 5⁵ 7⁹ 8³ 0⁴ 4³ 1⁵

CUPRINS

	Pag.
Părerii și părerii	5
Tocmai pe dos !	10
Caietul de socoteli al lui Ahmozé	16
Cunoștea Ahmozé tabla înmulțirii ?	20
Înmulțiri curioase	20
Ahmozé împărțea adunînd ?	22
Dar dacă împărțirea nu se făcea exact ?	24
Curioasa bibliotecă din Ninive	26
Gata înarmată s-a născut Atena din capul lui Jupiter	36
În tovărășia numerelor admirate de Pitagora	46
Pe aceeași ulicioară	63
Calcul de dragul calculului ?	75
Un nume cu bucluc	84
Un trăsnet din senin	95
Din nou la Școala lui Pitagora	107
Toate-s vechi și nouă toate	114
Pe dedesubt urzită între tăceri și semne	122
Secunda-ntrece veacul	132



021353(39)

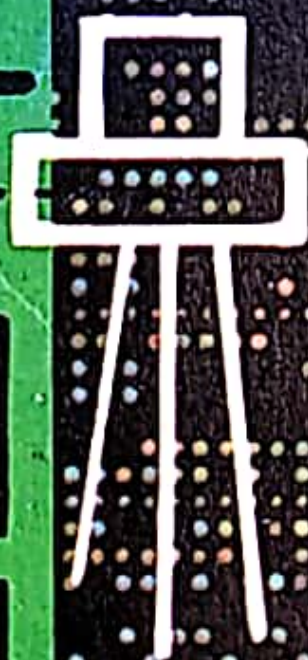
Lector : AURELIA SZASZ
Tehnoredactor : ELENA GĂRAJĂU

*Dat la cules 5 martie 1975. Bun de tipar 2 iu-
lie 1975. Apărut 1975. Comanda nr. 993. Tira-
17 000. Broșate 17 000. Coli de tipar 5.*

Tiparul executat sub comanda 43 la
I. P. „Filaret” str. F-ca de Chibrituri nr. 9—11.
București
Republica Socialistă România

Lei 4

EDITURA ION CREANGĂ — BUCUREȘTI



1⁹ 4⁷² 3⁶ 2¹⁴ 9⁶⁰
0³ 6⁷ 5¹ 0² 4